Anfangsgründe der reinen Mathematik

für

den Schul- und Selbst-Unterricht

bearbeitet

von

Carl Koppe,

Professor und Oberlehrer am Gymnasium zu Soest.

Zweiter Theil.

Planimetrie und Stereometrie.

Dritte verbesserte Auflage.

Mit 6 Figurentafeln.

Essen.
Druck und Verlag von G. D. Bädeker.
1851.

Anfangsgründe

der

reinen Mathematik,

für

den Schul- und Selbst-Unterricht

bearbeitet

von

Carl Koppe,

Professor und Oberlehrer am Gymnasium zu Soest.

Zweiter Theil.

Planimetrie und Stereometrie.

Dritte verbesserte Auflage.

Mit 6 Figurentafeln.

Essen.

Druck und Verlag von G. D. Bädeker.

1851.

Die

Planimetrie und Stereometrie

für

den Schul- und Selbst-Unterricht

bearbeitet

von

Carl Koppe,
Professor und Oberlehrer am Gymnasium zu Soest.

Dritte verbesserte Auflage.

Mit 6 Figurentafeln.

Essen.
Druck und Verlag von G. D. Bädeker.
1851.

Vorrede.

Ueber den Plan, welchen der Verfasser bei der Ausarbeitung dieses Lehrbuches befolgt hat, möge hier aus den Vorreden zu den früheren Auflagen Folgendes bemerkt sein:

Der Verfasser hat vorzüglich dahin gestrebt *), durch Befolgung eines einfachen und natürlichen Entwickelungsganges und durch eine klare und faßliche Darstellung dem Anfänger das Studium der Geometrie so leicht als möglich zu machen, ohne jedoch auf der andern Seite der wissenschaftlichen Strenge und Gründlichkeit etwas zu vergeben. Indem zugleich in erläuternden Bemerkungen, welche den einzelnen Abschnitten und Unterabtheilungen theils vorangehen, theils folgen, dem Leser der architektonische Plan des aufzuführenden Gebäudes vor Augen gelegt wird, ist die Absicht des Verfassers dahin gegangen, daß das Verständniß des Lesers sich nicht bloß auf ein richtiges Erfassen der einzelnen Sätze beschränken, sondern zu einer deutlichen Einsicht in den systematischen Zusammenhang und zu einer klaren Uebersicht des Ganzen erheben möge, was nach des Verfassers Ansicht wesentlich dazu beitragen dürfte, das Interesse des Anfängers an dem Studium der Wissenschaft zu erhöhen.

*) Indem der Verfasser hier das Ziel angiebt, nach welchem derselbe gestrebt habe, ist er jedoch weit davon entfernt, dasselbe für schon erreicht zu halten, und werden ihn einsichtsvolle Beurtheller durch ihre gütigen Rathschläge sehr verpflichten.

Während nicht wenige geometrische Lehrbücher es an vielen Stellen fast auf die Ueberraschung ihrer Leser abgesehen zu haben scheinen, indem sie dieselben durch eine vorgezeichnete Reihe von Operationen und Schlüssen zur Erkenntniß von der Richtigkeit eines Satzes oder zur Auflösung einer Aufgabe gelangen lassen, ohne irgend Aufschluß darüber zu geben, wie gerade diese Schritte dem vorgesteckten Ziele mit Nothwendigkeit entgegenführen, hat der Verfasser überall die Gründe und den natürlichen Zusammenhang des angewendeten Verfahrens mit der zu ermittelnden Wahrheit darzulegen, künstliche Beweise aber, so viel möglich, auszuschließen gesucht. *) Besonders ist in den ersten Abschnitten, welche für den ersten geometrischen Unterricht jüngerer Schüler, zwölf- bis dreizehnjähriger Knaben, bestimmt sind, nach der größten Deutlichkeit gestrebt, in den spätern Abschnitten jedoch, welche für reifere Schüler geschrieben sind, eine größere Kürze der Behandlung angewendet und mehr der eignen Beurtheilung des Lesers überlassen worden.

So wie in jeder andern Wissenschaft, so giebt es auch in allen Zweigen der Geometrie solche Sätze, deren Kenntniß für ein weiteres Fortschreiten durchaus unentbehrlich ist, und andere, deren Kenntniß zwar ebenfalls lehrreich und nützlich, aber nicht geradezu unerläßlich ist, und die daher, ohne den Zusammenhang zu stören, wenn Zeit und Umstände es erheischen, gänzlich übergangen werden oder einem spätern Cursus vorbehalten bleiben können. Diese Sätze sind im Lehrbuche durch ein vorgesetztes Sternchen (*) bemerklich gemacht. Ueberhaupt scheint es dem Verfasser bei der ungleichen Befähigung der Schüler in zahlreichen Classen zweckmäßig zu sein, dasjenige, was unumgänglich gewußt werden muß und von Jedem unbedingt zu fordern ist, bestimmt und deutlich von dem zu scheiden, dessen Kenntniß zwar ebenfalls nützlich und empfehlenswerth, wenn auch nicht geradezu unerläßlich ist. Auch dürfte ein rasches

*) Wenn man aber einwenden wollte, daß die angeführten Erläuterungen dem mündlichen Vortrage des Lehrers zu überlassen seien, so ist hiergegen zu bemerken, daß bei einer Wiederholung nach einem oder mehreren Jahren sich wohl schwerlich noch die Mehrzahl der Schüler der mündlichen Erklärung des Lehrers erinnern dürfte.

Fortschreiten in der Wissenschaft mehr geeignet sein, das Interesse der Anfänger rege zu halten, als eine weite Ausführung und ein langes Verweilen in der nehmlichen Lehre. *)

Wenn nun auch im Lehrbuche selbst über den bei der Anordnung der einzelnen Lehren befolgten Plan in besondern Bemerkungen Auskunft ertheilt ist, so dürfte doch mit Recht hier eine übersichtliche Darlegung dieses Planes erwartet werden.

Auf den ersten Blick scheint sich zunächst für die Planimetrie aus der Natur des Gegenstandes die folgende Anordnung zu ergeben, bei welcher vom Einfacheren zum Zusammengesetzteren fortgeschritten wird, und die sich auch wirklich in vielen Lehrbüchern findet: — Gerade Linie, Winkel, parallele Linien, Vieleck (Dreieck, Viereck u. s. w.), Kreis. Hierbei giebt sich jedoch sogleich darin ein großer Uebelstand zu erkennen, daß sich nicht mit Sicherheit darüber entscheiden läßt, welche Sätze eigentlich zum Kreise gehören, indem die Sätze, welche z. B. in diesem Lehrbuche unter jener Ueberschrift zusammengefaßt sind, sich mit wenigen Ausnahmen auch recht gut ohne alle Erwähnung des Kreises behandeln lassen, wie dieß z. B. wirklich in einem schätzbaren geometrischen Lehrbuche (Crelle, Lehrbuch der Elemente der Geometrie) geschehen ist. Auch sind jene Sätze in der That nur eine Fortsetzung und Erweiterung der Lehre vom Dreiecke und Vielecke überhaupt, wenn auch allerdings dadurch, daß man mit denselben die Vorstellung vom Kreise verbindet, an Anschaulichkeit und Kürze der Behandlung gewonnen wird.

Andererseits stellt sich jedoch bei einer gründlicheren Betrachtung ein höherer Eintheilungsgrund in Folgendem heraus: — Die Vergleichung räumlicher Größen führt entweder zur Gleichheit oder Verschiedenheit. Die Gleichheit kann aber wieder eine doppelte sein, entweder Gleichheit

---

*) Der Befolgung der obigen Grundsätze glaubt der Verfasser es zum großen Theile zuschreiben zu müssen, wenn bei dem öffentlichen Unterrichte, welchen er seit mehr als zwanzig Jahren in der Mathematik ertheilt, ein gänzliches Zurückbleiben einzelner Schüler in dieser Wissenschaft zu den seltnern Ausnahmen gehört und sich hierin kaum eine größere Verschiedenheit, als in andern Unterrichtsgegenständen gezeigt hat.

verbunden mit vollständiger Uebereinstimmung in allen Stücken, welche an und mit den zu vergleichenden Größen zugleich auftreten, — Congruenz — oder Gleichheit ohne eine solche vollständige Uebereinstimmung. — Da nun Congruenz offenbar das einfachste Verhältniß ist, welches überhaupt zwischen zwei räumlichen Größen stattfinden kann, so gehen die Sätze, welche sich mit der Vergleichung der Größen beschäftigen, in wiefern sie congruent sind oder nicht, allen andern voraus, nnd zwar nehmen grade Linie und Winkel die erste Stelle ein (Abschn. 1 u. 2), weil sie überhaupt keine andere Vergleichung zulassen; zu den Sätzen vom Winkel gehören aber auch offenbar die über parallele Linien (Abschn. 3); und es folgen nun die Sätze über die Dreiecke, Vierecke und Vielecke überhaupt (Abschn. 4 — 7), in wiefern sie congruent sind oder nicht, oder in wiefern überhaupt nur von der Gleichheit oder Ungleichheit der Linien und Winkel in oder an denselben die Rede ist, woran sich als eine Fortsetzung und Erweiterung die unter der Ueberschrift: „Vom Kreise" zusammengefaßten Sätze (Abschn. 8) anreihen.

Während bis hierher nur Linien und Winkel mit einander in Hinsicht ihrer Größe verglichen worden sind, und nur von Congruenz die Rede gewesen ist, zeigt sich bei der Vergleichung zweier Figuren in Beziehung auf ihre Größe, daß dieselben gleiche Größe haben können, ohne congruent zu sein, woraus sich ein folgender Abschnitt (9) ergiebt.

In diesem, so wie in allen vorhergehenden Abschnitten handelt es sich wieder nur um die einfache Frage, ob zwei räumliche Größen gleich oder verschieden sind. Weiter kann aber auch die Verschiedenheit selbst zum Gegenstande der Betrachtung erhoben werden und eben so wohl ihre Gleichheit, als Ungleichheit haben, woraus bei Gleichheit der Verschiedenheit oder des Verhältnisses der Begriff der Proportionalität hervorgeht. Da aber in einer jeden Proportion auf einmal vier Größen in Betracht gezogen werden, so haben es die nun folgenden Sätze über die Proportionalität der räumlichen Größen offenbar mit einer bei Weitem weniger einfachen Art der Vergleichung zu thun,

als alle vorhergehenden Sätze, in denen immer nur zwei Größen, Linien, Winkel oder Flächen, mit einander verglichen wurden, weshalb auch diese Sätze mit Recht jenen vorangehen, so wie ja wohl alle Erfahrungen darin übereinstimmen, daß die Lehre von der Proportionalität dem Anfänger die meiste Schwierigkeit darbietet. — Je nachdem nun in einer Proportion bloß Linien mit Linien zusammengestellt oder auch Flächen in Betracht gezogen werden, ergeben sich hieraus die beiden folgenden Abschnitte (10 und 11).

Endlich hat der zwölfte Abschnitt die Zurückführung der begrenzten Flächen auf benannte Zahlen oder die Ausmessung derselben zu seinem Gegenstande, und die dann noch folgenden Abschnitte der Planimetrie (13 — 16) enthalten Ergänzungen und Erweiterungen der früheren Abschnitte.

In der Stereometrie hat der Verfasser, so viel möglich, die einzelnen Lehren nach einem ähnlichen Plane zu entwickeln gesucht, wie die verwandten Sätze der Planimetrie. Eine Vergleichung der stereometrischen Sätze mit den verwandten Wahrheiten der Planimetrie, welche in der Stereometrie theils in ganz ähnlicher Art, theils in veränderter Gestalt wiederkehren, dürfte für den Schüler eben so anziehend, als lehrreich sein. Dagegen hat sich der Verfasser mit dem Verfahren einiger neuern Lehrbücher, welche die verwandten Sätze der Planimetrie und Stereometrie in abwechselnder Folge vortragen, nicht befreunden können. Denn wenn auch eine solche Behandlungsweise unbeschadet der Gründlichkeit sehr wohl ausführbar ist, so folgt hieraus doch noch keineswegs ihre methodische Zweckmäßigkeit. Mit gleichem Rechte könnte man auch die verschiedenen Lehren der Trigonometrie zwischen die einzelnen Abschnitte der Planimetrie einschalten.

Was ferner die wissenschaftliche Strenge und Gründlichkeit anlangt, so können sich in dieser Hinsicht dem Herausgeber eines geometrischen Lehrbuches wohl keine unübersteiglichen Schwierigkeiten entgegenstellen, da in dieser Beziehung bereits Euclid eine mustergiltige Arbeit hinter-

lassen hat. Wenn sich indeß der Verfasser nicht immer streng an Euclid gehalten hat, was auch von der Mehrzahl der neuern Lehrbücher gilt, so wird dieß um so weniger einer Rechtfertigung bedürfen, da dieses Buch zunächst für den ersten Unterricht in Schulen bestimmt ist, während Euclid offenbar nicht die Absicht gehabt haben kann, durch seine Elemente einem ähnlichen Bedürfnisse zu begegnen. — In einer Hinsicht wird der Verfasser allerdings den Vorwurf mangelnder Gründlichkeit nicht gänzlich abweisen können. Die Sätze über die Ausmessung des Kreises und der runden Körper sind in diesem Lehrbuche nur oberflächlich behandelt. Es gehören aber diese Sätze, welche sich auf die Vergleichung des Krummen und Graden beziehen, eigentlich in die Integralrechnung. Um eines Beispieles Willen schien es sich nicht der Mühe zu lohnen, den Anfänger mit einer vollständigen Methode zur Zurückführung des Krummen auf das Grade bekannt zu machen, zumal dasjenige, was die Lehrbücher hierüber gewöhnlich geben, keineswegs geeignet ist, dem Schüler die Mittel zum eigenen Forschen und zur Anwendung auf andere krumme Linien und Flächen darzubieten. Jene Sätze haben hier hauptsächlich nur um ihrer häufigen Anwendung Willen (z. B. in den Naturwissenschaften) eine Stelle erhalten, so wie sie auch ohne alle Störung des Zusammenhanges ganz übergangen werden können.

Wenn schon in der Planimetrie mehrfach von Euclid abgegangen ist, so kann sich der Verfasser in den meisten Fällen auf einen oder den andern Vorgänger stützen. Dagegen ist in der Stereometrie in den Sätzen, welche die gegenseitige Lage der Linien und Ebenen im Raume betreffen, eine eigenthümliche, von Euclid gänzlich abweichende Bahn betreten worden. *) Bekanntlich weist auch hier Euclid dem einzelnen Satze da seine Stelle an, wo entweder die Mittel zur Beweisführung desselben so eben gewonnen sind, oder wo der einzuführende Satz für den Beweis eines folgenden Satzes nicht länger entbehrt werden

*) Zuerst hat der Verfasser sein Verfahren in Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik B. 14, H. 1, S. 70 bekannt gemacht.

kann, so daß gar häufig Sätze des verschiedenartigsten Inhaltes durch einander gemischt sind. Mit demselben Rechte indeß, wie in jeder andern Wissenschaft, wird offenbar auch in der Geometrie von einer methodischen Behandlung gefordert, daß sie die einzelnen Lehren nach der Natur und Verwandtschaft ihres Inhalts zusammenstelle, und daß, indem die einen die andern stützen, alle sich zu einem harmonischen Ganzen verbinden. In wie weit nun diese Arbeit in den ersten Abschnitten der Stereometrie sich mehr, als Euclid's Elemente einem solchen Ziele nähert, darüber mögen sachkundige Beurtheiler entscheiden; zur besondern Genugthuung hat es dem Verfasser jedoch gereicht, daß seit dem Erscheinen der ersten Auflage dieses Lehrbuchs auch die Herausgeber anderer geometrischen Lehrbücher in den angeführten Abschnitten auf ganz ähnliche Art von Euclid abgegangen sind.

In der ersten Auflage waren für die meisten Sätze in den ersten Abschnitten der Planimetrie die Beweise nur angedeutet; der Verfasser hat jedoch schon in der zweiten Auflage sämmtliche Sätze mit vollständigen Beweisen versehen. Da die Gründe, welche für die eine oder andere Einrichtung sprechen, schon vielfach erörtert sind, auch nahe vor Augen liegen, so beschränkt sich der Verfasser auf Anführung der ihm erfreulichen Erfahrung, daß selbst in den untern mathematischen Classen, strebsame Schüler sich auf den Unterricht aus dem Lehrbuche vorzubereiten pflegen und ohne Schwierigkeit in demselben fortzustudiren vermögen. Um aber Sicherheit darüber zu erlangen, daß die Beweise schwierigerer Sätze auch von den schwächeren Schülern im Unterrichte richtig erfaßt worden sind, pflegt der Verfasser solche Beweise nach vorhergegangenem Vortrage in der Lehrstunde unter seiner Aufsicht nach einer an die Schultafel gezeichneten Figur ausarbeiten zu lassen.

Die anregendste Uebung für die eigenen Kräfte der Anfänger gewährt ohnstreitig die Anwendung der erlangten Kenntnisse zur Auflösung von Aufgaben. Der Verfasser hat daher den einzelnen Abschnitten der Planimetrie eine nicht unbedeutende Anzahl von Uebungsaufgaben beigefügt,

welche sich mit Hilfe der vorangehenden Lehrsätze lösen lassen. Hierbei ist der Verfasser jedoch nicht von der Ansicht ausgegangen, daß die jedem Abschnitte beigefügten Aufgaben nun auch so nach der Reihe vollständig mit den Schülern durchzunehmen seien; vielmehr pflegt derselbe die Aufgaben in den verschiedenen Lehrcursen mit Auswahl und zum Theile selbst für die wöchentlichen schriftlichen Arbeiten der obersten Classen zu benutzen.

Um dem Schüler schon frühzeitig Gelegenheit zu dieser angenehmen und nützlichen Beschäftigung zu geben, ist der Verfasser von dem streng systematischen Entwickelungsgange in so weit abgewichen, als schon nach dem fünften Abschnitte Aufgaben behandelt werden, noch ehe die Bedingungen, unter denen zwei Kreise sich schneiden, festgestellt sind, was offenbar erst im achten Abschnitte geschehen konnte. Wenn sich der Verfasser auch nicht auf den Vorgang von Euclid berufen will, welcher in seinen Elementen in gleicher Weise verfahren ist, so glaubt derselbe doch durch die angeführten didaktischen Rücksichten hinreichend entschuldigt zu sein, zumal Aufgaben für das System selbst einen untergeordneten Werth haben.

Den vier ersten Abschnitten konnten jedoch keine Aufgaben beigefügt werden, da der Schüler offenbar schon ein hinreichendes Material von Kenntnissen gewonnen haben muß, ehe er im Stande sein kann, Aufgaben auf eigne Hand zu lösen. Der Verfasser hat sich daher in den ersten Abschnitten darauf beschränkt, an geeigneten Stellen Fragen zur Uebung einzuschalten, welche von dem Schüler nach Anleitung des Lehrers in einem besondern Hefte zu bearbeiten sind, und zugleich dem Anfänger eine zweckmäßige Uebung in der sorgfältigen Zeichnung geometrischer Figuren gewähren können.

In der Stereometrie, welche sich für die Aufstellung constructiver Aufgaben nur wenig eignet, sind den einzelnen Abschnitten nur eine geringe Anzahl von Aufgaben und zwar ohne Auflösung beigefügt worden. Indem der Schüler diese nach Anleitung des Lehrers im Aufgabenhefte aus-

arbeitet, wird er zugleich Gelegenheit erhalten, sich in der Zeichnung stereometrischer Figuren zu üben, eine Uebung, die um so nothwendiger erscheint, als dieselbe für die Anfänger mit nicht unerheblichen Schwierigkeiten verbunden zu sein pflegt.

Für den Lehrsatz über die Ausmessung der Obelisken, welchen der Verfasser zuerst im Jahre 1838 mit Hilfe der Integralrechnung aufgefunden und in dem Journale für reine und angewandte Mathematik von Crelle (B. 18, H. 3) bekannt gemacht, später in einem besonderen Schriftchen (Ein neuer Lehrsatz der Stereometrie, Essen 1843) ausführlich bearbeitet und auf rein geometrischem Wege erwiesen hat, sind seit dem ersten Bekanntwerden des Satzes von verschiedenen Mathematikern (Steiner, Grunert u. a.) noch andere Beweise gegeben worden. Der hier mitgetheilte Beweis scheint sich jedoch dem Verfasser für den Schulunterricht durch Einfachheit und Faßlichkeit am meisten zu empfehlen.

Der aus dem oben angeführten Schriftchen entlehnte und schon der zweiten Auflage beigefügte Anhang über die Ausmessung der Fässer behandelt einen Gegenstand, welcher in den Lehrbüchern der Stereometrie gewöhnlich ganz übergangen wird, obschon diese Körpergattung so häufige Anwendung findet. Dieselbe Formel, welche hier auf elementarem Wege abgeleitet wird, findet sich auch, jedoch ohne Beweis in der praktischen Geometrie von Tobias Mayer (Th. 5, § 169).

In dieser neuen Auflage hat der Verfasser das Buch nochmals einer sorgfältigen Durchsicht unterzogen und an verschiedenen Stellen Verbesserungen eintreten lassen. Ins Besondere hofft derselbe, daß die Sätze über die senkrechte Lage der Ebenen und Linien im Raume in der neuen Bearbeitung an Deutlichkeit und Verständlichkeit für den Anfänger gewonnen haben werden. Die Zahl der Paragraphen weicht hier von der früheren Auflage etwas ab; im Uebrigen findet in dieser Hinsicht zwischen beiden Auflagen durchgehends Uebereinstimmung statt.

Möge das Buch auch in der neuen Auflage sich des ihm bisher von Seiten der Lehrenden zu Theil gewordenen Beifalles erfreuen und die Lernenden mit Lust und Eifer für geometrische Studien erfüllen.

Soest im August 1850.

Der Verfasser.

Inhalt.

II. Stereometrie.

Anhang.

Geometrie.

Einleitung.

§ 1. Erklärung.

Die Geometrie hat zu ihrem Gegenstande die Körper, Flächen und Linien.

Ein Körper ist ein begrenzter Raum; die Fläche ist die Grenze des Körpers; die Linie ist die Grenze der Fläche, und die Grenze der Linie ist der Punkt.

Körper, Flächen und Linien können als aus Theilen bestehend gedacht werden, und die Theile eines Körpers sind wieder Körper, die Theile der Fläche wieder Flächen und die Theile der Linie wieder Linien. — Körper, Flächen und Linien gehören daher zu den Größen, und weil sie im Raume vorgestellt werden, so nennt man sie räumliche Größen. Man kann daher auch sagen: die Geometrie ist die Lehre von den räumlichen Größen und folglich ein Theil der Mathematik, welche sich mit den Größen überhaupt beschäftigt.

Da der Punkt keine Theile hat, so gehört er nicht zu den Größen, und seiner geschieht in der Geometrie nur in so fern Erwähnung, als er die Grenze der Linie bildet.

Die drei räumlichen Größen unterscheiden sich von einander durch die Anzahl ihrer Ausdehnungen; der Körper hat nehmlich drei Ausdehnungen: Länge, Breite und Höhe; die

Fläche hat zwei Ausdehnungen: Länge und Breite; die Linie hat nur eine Ausdehnung: Länge.

Anm. 1. Am geometrischen Körper berücksichtigt man nur Größe und Gestalt, am physischen noch unzählige andere Merkmale, als Schwere, Härte, Farbe, Glanz, Durchsichtigkeit, Geruch, Geschmack u. s. w.

Beispiele von geometrischen Körpern sind der Würfel, eingeschlossen von sechs Flächen, deren jede wieder von vier Linien begrenzt ist; die Walze, eingeschlossen von einer krummen Fläche und zwei Kreisen; die Kugel, eingeschlossen von einer einzigen krummen Fläche, u. dgl. m.

Flächen kommen immer nur an Körpern, Linien nur an Flächen vor; nirgends giebt es eine vom Körper getrennte Fläche, eine von der Fläche getrennte Linie. In unserer Vorstellung können wir jedoch die Fläche vom Körper und die Linie von der Fläche gesondert betrachten.

Anm. 2. Da die räumlichen Größen nur eine besondere Art Größen sind, so müssen von denselben auch sämmtliche Sätze der allgemeinen Größenlehre gelten; diejenigen mathematischen Sätze, welche für alle Größen überhaupt gelten und in der Geometrie vorzüglich angewendet werden, sind folgende:

1) Größen derselben Art sind entweder gleich oder ungleich. Sind zwei Größen A und B einander gleich, so wird dieses durch A = B (lies A gleich B) bezeichnet.

Eine Größe A heißt größer, als eine andere B, wenn diese als Theil von jener gedacht werden kann, in Zeichen: $A > B$ (lies A größer, als B) oder $B < A$ (lies A kleiner, als B).

2) Jedes Ganze ist allen seinen Theilen zusammen gleich, und größer als jeder seiner Theile.

3) Zwei Größen, welche einer dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich.

4) Ist eine Größe größer oder kleiner, als die eine von zwei gleichen Größen, so ist sie auch größer oder kleiner, als die andere.

5) Ist eine Größe größer, als eine zweite, und diese größer, als eine dritte, so ist auch die erste Größe größer, als die dritte.

6) Gleiches zu Gleichem hinzugefügt giebt Gleiches.

7) Gleiches zu Größerem hinzugefügt giebt Größeres.

8) Größeres zu Größerem hinzugefügt giebt Größeres.

9) Gleiches von Gleichem hinweggenommen giebt Gleiches.

12) Gleiches von Größerem hinweggenommen giebt Größeres.

11) Größeres von Gleichem hinweggenommen giebt Kleineres.

12) Kleineres von Größerem hinweggenommen giebt Größeres.

§ 2. Erklärung.

Die Linien sind von zweierlei Art, gerade und krumme. Eben so sind auch die Flächen von zweierlei Art, ebene und unebene oder krumme Flächen.

Anm. Der Begriff der geraden Linie ist ein einfacher; und es ist daher weder nöthig, noch möglich zu sagen, was eine gerade Linie ist.

Den Begriff der geraden Linie als gegeben annehmend, kann man von der ebenen Fläche als Merkmal aufführen, daß, wenn man beliebige Punkte in derselben durch gerade Linien verbindet, diese ganz mit der Fläche zusammenfallen.

§ 3. Erklärung.

Die Geometrie zerfällt in zwei Theile, Planimetrie und Stereometrie. Die Planimetrie betrachtet nur dasjenige, was in ein und derselben Ebene vorgestellt werden kann; die Stereometrie beschränkt ihre Vorstellungen nicht auf eine Ebene.

Anm. Räumliche Größen, welche in der Planimetrie behandelt werden, sind hiernach: Die gerade Linie und solche krumme Linien, welche in einer Ebene liegen, wie z. B. der Kreis, ferner ebene Figuren z. B. Dreieck, Viereck u. s. w. Von der Planimetrie ausgeschlossen und der Stereometrie vorbehalten sind dagegen: alle Körper, die krummen Flächen, z. B. die Kugelfläche, Kegelfläche u. dgl. m., und solche krumme Linien, wie die Schraubenlinie, welche nicht in einer Ebene liegen.

Ein Theil der Geometrie ist die Longimetrie, welche dasjenige zu ihrem Gegenstande hat, was in derselben geraden Linie liegend vorgestellt werden kann. Weil aber dieser Zweig eine zu geringe Zahl von Sätzen hat, so wird er gewöhnlich nicht besonders aufgeführt, sondern bildet die ersten Sätze der Planimetrie.

Erste Abtheilung.

Planimetrie.

Erster Abschnitt.

Von den Linien.

Bemerkung. Gerade Linien können in Hinsicht ihrer Lage und in Hinsicht ihrer Größe mit einander verglichen werden; krumme Linien können außerdem noch in der Gestalt von einander verschieden sein. Auf jene beiden Verhältnisse beziehen sich die Grundsätze §§ 4 und 6.

§ 4. Grundsatz.

Die Lage einer geraden Linie ist durch zwei Punkte gegeben; d. h. zwischen zwei Punkten läßt sich nur eine einzige gerade Linie ziehen.

Dagegen lassen sich zwischen zwei gegebenen Punkten unzählig viele krumme Linien ziehen.

Anm. Zwischen zwei Punkten läßt sich allemal eine gerade Linie ziehen; dagegen kann nicht durch jede drei Punkte eine gerade Linie gelegt werden.

§ 5. Zusatz.

Zwei gerade Linien können nur einen Punkt gemeinschaftlich haben; man sagt dann: sie durchschneiden sich.

§ 6. Grundsatz.

Die gerade Linie ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte.

Bemerkung. Gerade Linien können begrenzt und unbegrenzt gedacht werden. Begrenzte gerade Linien können in Hinsicht ihrer Größe mit einander verglichen werden; um z. B. zu untersuchen, ob die Linie AB (Fig. 1) gleich CD ist, lege ich die eine AB so auf die andere CD, daß der Endpunkt A auf C fällt und sehe dann zu, wo der Endpunkt B hinfällt; wenn dieser gerade auf D fällt, so ist $AB = CD$; wenn aber der Endpunkt B über D hinaus fällt, z. B. auf E (Fig. 2), so ist $AB > CD$, und wenn der Endpunkt B zwischen C und D fällt, z. B. auf F (Fig. 3), so ist $AB < CD$.

Hieraus ergiebt sich die folgende Erklärung.

§ 7. Erklärung.

Zwei (begrenzte) gerade Linien sind gleich ($AB = CD$, Fig. 1), wenn sie sich so auf einander legen lassen, daß beide Paar Endpunkte (A auf C und B auf D) zusammen fallen; — eine Linie ist größer, als eine andere ($AB > CD$, Fig. 2), wenn sie sich so auf einander legen lassen, daß ein Paar Endpunkte (A und C) zusammen fallen, der zweite Endpunkt (B) der ersten Linie aber über den zweiten Endpunkt (D) der andern Linie hinausfällt; und eine Linie ist kleiner, als eine andere ($AB < CD$, Fig. 3), wenn sie sich so auf einander legen lassen, daß ein Paar Endpunkte (A und C) zusammenfallen, der zweite Endpunkt (B) der ersten Linie aber zwischen die beiden Endpunkte (C und D) der andern Linie fällt.

Bemerkung. Wenn im Folgenden das Wort Linie ohne Beisatz gebraucht wird, so ist in der Regel darunter die gerade Linie zu verstehen.

§ 8. Erklärung.

Von den krummen Linien betrachten wir hier nur den Kreis. — Der Kreis ist eine in sich selbst zurücklaufende krumme Linie, deren Punkte sämmtlich von einem innerhalb liegenden Punkte gleichen Abstand haben. Dieser Punkt (C, Fig. 4) heißt Mittelpunkt, und eine Linie (AC), welche den Mittelpunkt mit einem Punkte des Kreises verbindet, wird Radius oder Halbmesser genannt. Eine jede zwischen zwei Punkten des Kreises gezogene Linie (EF) heißt Sehne, und wenn die Sehne (GH) durch den Mittelpunkt geht, Durchmesser.

Ein Kreis entsteht, wenn man eine gerade Linie um den einen Endpunkt so lange herumdreht, bis sie wieder in ihre frühere Lage zurückkehrt; der andere Endpunkt dieser Linie beschreibt einen Kreis.

Anm. In den mathematischen Lehrbüchern versteht man unter dem Kreise gewöhnlich die von der Kreislinie eingeschlossene Figur. Für die hier gegebene Erklärung spricht: 1) der gewöhnliche Sprachgebrauch des gemeinen Lebens; 2) der wissenschaftliche Sprachgebrauch, (zwei Kreise schneiden sich oder berühren sich von Innen, was offenbar nur auf die Kreislinien, nicht auf die Flächen bezogen werden kann); 3) die größere Bequemlichkeit und Kürze, da man es in der Geometrie unvergleichlich öfter mit der Kreislinie, als mit der Kreisfläche zu thun hat; 4) die Analogie; — unter den Benennungen: Ellipse, Parabel, Lemniscate, Cycloide u. s. w. versteht Niemand Flächen, sondern Linien.

§ 9. Zusatz.

1) Alle Radien eines Kreises sind gleich.

2) Der Durchmesser ist das Doppelte des Radius.

3) Daher sind auch alle Durchmesser desselben Kreises einander gleich.

4) Kreise, welche mit denselben Radien beschrieben sind, decken sich, d. h. man kann sich dieselben so auf einander gelegt denken, daß alle Punkte des einen Kreises auf den andern Kreis fallen.

§ 10. Zusatz.

Wenn ein Punkt A (Fig. 4) auf dem Kreise gegeben ist, und ich verbinde diesen Punkt A mit dem Mittelpunkte C, so ist die Verbindungslinie AC ein Radius; wenn aber der Punkt B außerhalb des Kreises liegt, so ist die Verbindungslinie BC größer, als der Radius AC, und wenn der Punkt D innerhalb des Kreises liegt, so ist die Verbindungslinie CD kleiner, als der Radius AC. — Hieraus ergiebt sich umgekehrt:

1) Ein Punkt liegt auf dem Kreise, wenn sein Abstand vom Mittelpunkte dem Radius gleich ist.

2) Ein Punkt liegt außerhalb des Kreises, wenn sein Abstand vom Mittelpunkte größer ist, als der Radius.

3) Ein Punkt liegt innerhalb des Kreises, wenn sein Abstand vom Mittelpunkte kleiner ist, als der Radius.

§ 11. Erklärung.

Ein Theil eines Kreises heißt ein Bogen.

Zwei Bogen, welche mit demselben Radius beschrieben sind, (AB u. DE, Fig. 15) sind gleich, wenn sie sich so aufeinander legen lassen, daß ihre Mittelpunkte (C u. F) und ihre Endpunkte (A u. D u. B u. E) zusammenfallen. — Ein Bogen ist **größer**, als ein anderer, wenn sie sich so auf einander legen lassen, daß die Mittelpunkte und ein Paar Endpunkte zusammenfallen, der zweite Endpunkt des ersten Bogens aber über den zweiten Endpunkt des andern Bogens hinausfällt; — und ein Bogen heißt **kleiner**, als ein anderer, wenn sie sich so auf einander legen lassen, daß ihre Mittelpunkte und ein Paar Endpunkte zusammenfallen, der zweite Endpunkt des ersten Bogens aber zwischen die Endpunkte des andern Bogens fällt.

Anm. Wie sich Bogen solcher Kreise, welche mit verschiedenen Radien beschrieben sind, vergleichen lassen, kann erst weiter unten in dem Abschnitte, welcher von der Ausmessung des Kreises handelt, gezeigt werden.

§ 12. Zusatz.

Jeder Durchmesser theilt den Kreis in zwei gleiche Bogen, welche man **Halbkreise** nennt.

§ 13. Erklärung.

Man pflegt den Kreis in 360 gleiche Theile zu theilen und einen solchen Theil **einen Grad** zu nennen; den Grad theilt man wieder in 60 gleiche Theile und nennt diese Theile **Minuten**; die Minute theilt man in 60 **Secunden** u. s. w. Einen Bogen von 37 Graden 28 Minuten und 9 Secunden drückt man kürzer so aus: $37^0\ 28'\ 9''$.

Einen Bogen von 90^0 oder den vierten Theil des ganzen Kreises nennt man einen **Quadranten** — **Sextant**. — **Octant** 2c.

§ 14. Erklärung.

Eine unbegrenzte **Linie** (AB) **durchschneidet einen Kreis** (Fig. 5), wenn die Linie theils innerhalb, theils außerhalb des Kreises liegt, und eine Linie (EF) **berührt** den Kreis und wird **Tangente** genannt, wenn sie nur einen Punkt (G) mit demselben gemeinschaftlich hat und übrigens ganz außerhalb des Kreises liegt.

§ 15. Zusatz.

Eine Linie AB (Fig. 5), welche durch einen Punkt D innerhalb des Kreises geht, muß denselben zweimal durchschneiden, — weil der Kreis geschlossen, die Linie aber nach zwei Seiten unbegrenzt ist.

§ 16. Erklärung.

Zwei Kreise können überhaupt eine fünffache Lage gegen einander haben; sie können sich schneiden (Fig. 98), sie können sich berühren von Außen (Fig. 97) oder von Innen (Fig. 99) und ein Kreis kann ganz außerhalb (Fig. 96) oder ganz innerhalb (Fig. 100) des andern Kreises liegen, ohne mit demselben zusammenzutreffen.*)

Zwei Kreise durchschneiden sich (Fig. 98), wenn jeder theils innerhalb, theils außerhalb des andern liegt.

Zwei Kreise berühren sich von Außen (Fig. 97), wenn beide nur einen Punkt gemeinschaftlich haben und übrigens jeder ganz außerhalb des andern liegt.

Zwei Kreise berühren sich von Innen (Fig. 99), wenn sie nur einen Punkt gemeinschaftlich haben und übrigens der eine ganz innerhalb des andern liegt.

Zwei Kreise, welche denselben Mittelpunkt haben, werden concentrisch, wenn sie verschiedene Mittelpunkte haben, excentrisch genannt.

Zweiter Abschnitt.

Von den Winkeln.

§ 17. Erklärung.

Wenn man in einer unbegrenzten Ebene einen beliebigen Punkt A (Fig. 6) annimmt, von diesem Punkte aus zwei Linien zieht, AB und AC, und sich dieselben unbegrenzt fortlaufend denkt, so schneiden diese beiden Linien von der unbegrenzten Ebene ein Stück aus, welches sich nach einer Seite hin ins Unendliche erstreckt, nach zwei Seiten aber durch die Linien AB und AC begrenzt wird. Man nennt dasselbe einen Winkel.

Ein Winkel ist also eine ebene Fläche, welche zwischen zwei Linien liegt, die von einem Punkte ausgehen und ins Unendliche fortlaufen. — Die Linien, welche den Winkel begrenzen, heißen seine Schenkel, und der Punkt, welchen sie gemeinschaftlich haben, wird Scheitel genannt.

---

*) Die Beweise für diese vorläufigen Behauptungen folgen weiter unten in den § 148 — 153.

Ein Winkel entsteht, wenn man sich den einen Schenkel (AB, Fig. 6) um den Scheitel (A) so lange herumgedreht denkt, bis er in die Lage des andern Schenkels (AC) kommt.

Anm. 1. Man bezeichnet die Winkel auf dreierlei Art: 1) durch einen Buchstaben, welchen man in die Nähe des Scheitels zwischen beide Schenkel schreibt, — 2) durch einen Buchstaben, welchen man in die Nähe des Scheitels außerhalb der Schenkel des Winkels schreibt. Weil aber diese Bezeichnungsarten für den Fall, daß an demselben Scheitelpunkte mehrere Winkel liegen, nicht ausreichen, so wendet man noch folgende Bezeichnungsart an: — 3) durch drei Buchstaben, von denen man einen A an den Scheitel, die andern B und C an beliebige Punkte der beiden Schenkel BA und CA schreibt (Fig. 6), und nennt nun diesen Winkel entweder BAC oder CAB, so nehmlich, daß jedesmal der am Scheitel stehende Buchstabe A in die Mitte kommt.

Anm. 2. Da die Schenkel eines Winkels unbegrenzt fortlaufend gedacht werden, so ist es gar nicht möglich, einen Winkel vollständig zu zeichnen; die gezeichneten Schenkel sind immer nur Theile der in's Unendliche fortlaufenden Schenkel; hierbei ist es für die Größe des Winkels ganz einerlei, ob man diese Theile länger oder kürzer zeichnet, weil, wie gesagt, die wirklichen Schenkel des Winkels in's Unendliche fortlaufend gedacht werden.

Bemerkung. Wenn ich zwei Winkel ABC und DEF (Fig. 7) in Hinsicht ihrer Größe vergleichen will, so denke ich mir dieselben so auf einander gelegt, daß der Scheitelpunkt B auf E und der eine Schenkel BC auf EF fällt, und sehe nun zu, wo der andere Schenkel AB hinfällt; wenn AB gerade auf DE fällt, so ist Winkel ABC = DEF; wenn aber AB über DE hinaus, z. B. auf EG fallen sollte, dann wäre Winkel ABC > DEF, und wenn AB zwischen DE und EF z. B. auf EH fallen sollte, dann wäre Winkel ABC < DEF. Hieraus ergiebt sich die folgende Erklärung.

§ 18. Erklärung.

Zwei Winkel sind gleich, wenn sie sich so auf einander legen lassen, daß ihre Scheitel und beide Paar Schenkel zusammenfallen. — **Ein Winkel ist größer**, als ein anderer, wenn sie sich so auf einander legen lassen, daß die Scheitelpunkte und ein Paar Schenkel zusammenfallen, der zweite Schenkel des ersten Winkels aber über den zweiten Schenkel des andern Winkels hinaus fällt. — **Ein Winkel ist kleiner**, als ein anderer, wenn sie sich so auf einander legen lassen, daß ihre Scheitelpunkte und ein Paar Schenkel zusammenfallen, der zweite Schen-

kel des ersten Winkels aber zwischen die beiden Schenkel des andern Winkels fällt.

Bemerkung. Wenn ich mir die Linie AB (Fig. 8) um den festen Endpunkt A herumgedreht denke, bis sie in die Lage AC kommt, so entsteht der Winkel CAB; drehe ich noch weiter bis in die Lage AD, so erhalte ich den Winkel DAB, welcher aus den beiden Winkeln CAB und DAC besteht u. s. f. Unter den Winkeln, welche so entstehen können, ist mir besonders der Winkel EAB merkwürdig, dessen zweiter Schenkel AE mit AB eine gerade Linie bildet. Man nennt diesen Winkel einen flachen; er besteht hier in der Figur aus den drei Theilen CAB, DAC und EAD.

§ 19. Erklärung.

Ein flacher Winkel ist ein solcher, dessen beide Schenkel eine gerade Linie bilden.

Ein flacher Winkel entsteht, wenn man eine gerade Linie, welche in einem Punkte begrenzt, nach der andern Seite hin unbegrenzt gedacht wird, um diesen einen Punkt so lange herumdreht, bis sie in die Verlängerung ihrer ursprünglichen Lage fällt.

Man pflegt den flachen Winkel mit dem griechischen Buchstaben π (Pi) zu bezeichnen.

§ 20. Zusatz.

Alle flachen Winkel sind einander gleich. — Denn sie lassen sich so auf einander legen, daß Scheitel und Schenkel sich decken.

Bemerkung. Wenn ich fortfahre die Linie AB (Fig. 8), nachdem sie die Lagen AC, AD, AE durchlaufen hat, noch weiter um den Punkt A zu drehen, etwa bis in die Lage AF, so entsteht ein Winkel FAB, welcher den flachen Winkel EAB um das Stück EAF übertrifft. Man nennt einen solchen Winkel einen erhabenen.

§ 21. Erklärung.

Ein Winkel, welcher größer ist, als ein flacher, wird ein erhabener, und ein Winkel, welcher kleiner, als ein flacher Winkel ist, wird ein hohler Winkel genannt.

Im Folgenden wird vorzugsweise von hohlen Winkeln die Rede sein, und so oft das Wort Winkel ohne Beisatz gebraucht wird, ist allemal der hohle Winkel gemeint.

§ 22. Erklärung.

Zwei (hohle) Winkel (ABC und ABD, Fig. 9), welche den Scheitelpunkt (B) und einen Schenkel (AB) gemeinschaftlich haben, und bei denen die beiden anderen Schenkel (BC und BD) eine gerade Linie bilden, heißen Nebenwinkel.

Uebungsfrage. Wie zeichnet man zu einem gegebenen Winkel den zugehörigen Nebenwinkel?

§ 23. Zusatz.

1) Zwei Nebenwinkel ABC und ABD (Fig. 9) betragen zusammen einen flachen Winkel CBD. — Hieraus folgt weiter:

2) Sind zwei Winkel m und n (Fig. 10) einander gleich, so müssen auch ihre Nebenwinkel p und q einander gleich sein.

3) Ist ein Winkel m größer, als ein anderer Winkel n (Fig. 11), so ist der zum größern gehörige Nebenwinkel p kleiner, als der zum kleinern gehörige Nebenwinkel q.

§ 24. Erklärung.

Zwei (hohle) Winkel (ABC und DBE, Fig. 12), welche den Scheitelpunkt (B) gemeinschaftlich haben, und bei denen die gegenüberstehenden Schenkel (AB und BE — und BC und BD) gerade Linien bilden, heißen Scheitelwinkel.

Anm. Auch die Winkel CBE und ABD sind Scheitelwinkel.

Uebungsfrage. Wie zeichnet man zu einem gegebenen Winkel den zugehörigen Scheitelwinkel?

§ 25. Lehrsatz.

Scheitelwinkel sind einander gleich.

Beweis. Um zu zeigen, daß der Winkel ABC = DBE (Fig. 12) ist, nehme ich den Winkel CBE zu Hülfe. Dieser bildet mit ABC den flachen Winkel ABE und mit DBE den flachen Winkel CBD. Nehme ich nun von beiden flachen Winkeln den Winkel CBE weg, so bleibt das eine Mal Winkel ABC und das andere Mal DBE übrig. Da ich Gleiches von Gleichem weggenommen habe, so muß auch Gleiches übrig bleiben; folglich ist Winkel ABC = DBE.

Bemerkung. Einen Satz erweisen heißt ihn auf frühere Sätze zurückführen.

§ 26. Erklärung.

Ein rechter Winkel (ABC, Fig. 13) ist ein solcher Winkel, welcher seinem Nebenwinkel (ABD) gleich ist.

Der rechte Winkel ist also die Hälfte des flachen und wird gewöhnlich mit R bezeichnet.

§ 27. Zusatz.

Da nach dem vorhergeh. § jeder rechte Winkel die Hälfte eines flachen Winkels ist, so müssen alle rechten Winkel einander gleich sein, weil wir schon gesehen haben, daß alle flachen Winkel gleich sind.

Uebungsfrage. Wie verfährt man im Praktischen, um zu untersuchen, ob ein Winkel ein rechter ist?

§ 28. Erklärung.

(Hohle) Winkel, welche nicht rechte Winkel sind, nennt man schiefe Winkel, sie zerfallen wieder in spitze und stumpfe; und zwar heißt ein Winkel spitz, wenn er kleiner, stumpf, wenn er größer ist, als ein rechter Winkel.

§ 29. Zusatz.

1) Zwei rechte Winkel (ABC und ABD, Fig. 13) machen zusammen einen flachen (DBC) aus.

2) Ein spitzer Winkel (ABC, Fig. 9) hat einen stumpfen (ABD) und ein stumpfer Winkel (ABD) hat einen spitzen (ABC) zum Nebenwinkel; — denn so viel dem einen zum rechten Winkel fehlt, so viel muß der andere größer sein, als ein rechter, weil beide zusammen einen flachen oder zwei rechte Winkel ausmachen.

§ 30. Erklärung.

Zwei Linien (AB und CD, Fig. 13) stehen auf einander senkrecht, wenn sie rechte Winkel bilden; man sagt auch wohl, die eine (AB) ist ein Loth auf der andern (CD).

Eine Linie (AB, Fig. 9) steht schief auf einer andern (CD), wenn sie mit einander schiefe Winkel bilden.

§ 31. Zusatz.

Durch den nehmlichen Punkt einer Linie läßt sich nur eine einzige Linie ziehen, welche auf derselben senkrecht steht; dagegen können durch einen Punkt in einer Linie unzählige schiefe Linien gezogen werden.

Bemerkung. Wenn man in einer Linie AB, (Fig. 14), welche von einem festen Punkte A ausgehend, nach der andern Seite aber unbegrenzt fortlaufend gedacht wird, einen willkühr-lichen Punkt C annimmt und hierauf die Linie um den Punkt A

dreht, bis sie irgend eine andere Lage AD erreicht, so beschreibt der Punkt C einen Kreisbogen CE, während durch die Drehung der Linie selbst der Winkel BAD erzeugt worden ist. Der Scheitelpunkt A dieses Winkels fällt mit dem Mittelpunkte des Bogens zusammen, und die Schenkel des Winkels AB und AD gehen durch die Endpunkte des Bogens C und E.

§ 32. Erklärung.

Ein Winkel, dessen Scheitel in den Mittelpunkt eines Bogens fällt, und dessen Schenkel durch die Endpunkte dieses Bogens gehen, wird der zum Bogen gehörige Centriwinkel genannt.

Bemerkung. In den nächstfolgenden Sätzen, in welchen Centriwinkel und Bogen verglichen werden, ist durchgehends angenommen, daß alle Bogen mit demselben Radius beschrieben sind.

§ 33. Lehrsatz.

Zu gleichen Bogen gehören auch gleiche Centriwinkel, und zum größern Bogen gehört auch ein größerer Centriwinkel.

Beweis. Wenn der Bogen AB = DE (Fig. 15) ist, so muß auch Centriwinkel ACB = DFE sein. — Denn da die Bogen AB und DE als gleich vorausgesetzt sind, so lassen sie sich so aufeinander legen, daß ihre Mittelpunkte und Endpunkte zusammenfallen, nehmlich C auf F, B auf E und A auf D. — Nun fällt auch die Linie BC auf EF, weil der Punkt B auf E und C auf F gefallen ist, und die Linie AC fällt auf DF, weil der Punkt A auf D und C auf F gefallen ist; demnach ist Winkel ACB = DFE, weil Scheitel und Schenkel des einen mit Scheitel und Schenkel des andern zusammengefallen sind.

Eben so läßt sich zeigen, daß, wenn der Bogen AB > DE wäre, auch der zugehörige Centriwinkel ACB > DFE sein müßte.

§ 34. Lehrsatz.

Gleiche Centriwinkel haben auch gleiche Bogen, und der größere Centriwinkel hat auch einen größeren Bogen.

Beweis. Wenn der Centriwinkel ACB = DFE (Fig. 15) ist, so muß auch Bogen AB = DE sein. — Da der Winkel ACB = DFE vorausgesetzt ist, so lassen sie sich so aufeinander legen, daß Scheitel und Schenkel auf einander fallen, nehmlich Scheitel C auf F, Schenkel BC in die Richtung von EF und Schenkel AC in die Richtung von DF. — Nun muß auch der Punkt B auf E und der Punkt A auf D fallen, weil der Radius BC = EF und

AC = DF ist. Demnach ist der Bogen AB = DE, weil Mittelpunkte und Endpunkte zusammengefallen sind.

Eben so läßt sich auch zeigen, daß zum größern Centriwinkel ein größerer Bogen gehört.

§ 35. Zusatz.

Der Centriwinkel eines Halbkreises ist allemal ein flacher und der Centriwinkel eines Quadranten ein rechter Winkel.

Man pflegt den rechten Winkel, so wie den Quadranten, in 90 gleiche Theile zu theilen und diese Theile ebenfalls Grade zu nennen; weiter theilt man auch bei den Winkeln den Grad in 60 Minuten und die Minute in 60 Secunden. Man sieht hiernach leicht ein, daß jeder Winkel eben so viele Grade, Minuten und Secunden enthält, als ein Kreisbogen, welchen man aus dem Scheitelpunkte des Winkels zwischen den Schenkeln desselben beschreibt.

Anm. 1. Es sei z. B. der Winkel DAB (Fig. 14) gegeben und zwischen seinen Schenkeln aus dem Scheitel A der Bogen CE beschrieben. Man denke sich den Bogen CE bis zum Quadranten CF vervollständigt, diesen in seine 90^0 getheilt, und nehme an, es kämen auf den Bogen CE 57^0. Verbinden wir nun sämmtliche Theilungspunkte mit dem Scheitelpunkte A, so ist jetzt auch der rechte Winkel FAB nach §. 33 in 90 gleiche Theile getheilt, und auf den Winkel DAB kommen 57 dieser Theile. Demnach enthält der Centri-Winkel DAB eben so viel Grade, als der Bogen CE.

Weiter unten werden wir ganz allgemein zeigen, daß 1) Bogen, welche mit denselben Radien beschrieben sind, sich wie ihre Centri-Winkel verhalten und 2) daß Kreisbogen, welche mit verschiedenen Radien zwischen den Schenkeln eines Winkels aus dem Scheitelpunkte beschrieben sind, zu den zugehörigen ganzen Kreisen das nämliche Verhältniß haben. —

Anm. 2. Auf den vorhergehenden Sätzen beruht die Einrichtung und der Gebrauch des Transporteurs, eines in Grade eingetheilten Halbkreises, welchen man dazu anwendet, Winkel auszumessen und abzuzeichnen. —

Uebungsfrage. Wie verfährt man im Praktischen, um mit Hülfe des Transporteurs einen Winkel abzuzeichnen?

Dritter Abschnitt.
Von parallelen Linien.

§ 36. Erklärung.

Zwei Linien, welche in einer Ebene unbegrenzt fortlaufen und sich nicht schneiden, heißen parallel.

Wenn zwei Linien AB und CD, Fig. 1, parallel sind, so wird dieß durch AB ∥ CD (lies: AB parallel CD) bezeichnet.

§ 37. Erklärung.

Wenn man untersuchen will, ob zwei Linien parallel sind, so pflegt man sie mit einer dritten zu durchschneiden; auf diese Art entstehen 8 hohle Winkel, welche man zunächst in äußere (a, b, g und h, Fig. 16) und innere (c, d, e und f) eintheilen kann. Ferner werden ein äußerer und ein innerer Winkel (in der Figur a u. e, b u. f, d u. h und c u. g), welche an derselben Seite der schneidenden Linie und der parallelen Linien liegen, Gegenwinkel, — zwei äußere Winkel aber (wie a u. h und b u. g) oder zwei innere Winkel (wie c u. f und d u. e), welche an entgegengesetzten Seiten der schneidenden Linie liegen, Wechselwinkel genannt; und endlich sollen zwei äußere Winkel (wie a u. g und b u. h), oder zwei innere Winkel (wie c u. e und d u. f), welche an derselben Seite der schneidenden Linie liegen, Ergänzungswinkel heißen.

Obschon man von diesen Benennungen vorzugsweise nur bei parallelen Linien Gebrauch macht, so wendet man dieselben doch zuweilen auch bei solchen Linien an, welche von der parallelen Richtung abweichen.

Bemerkung. Ehe wir aber zu der Betrachtung der parallelen Linien selbst übergehen, schicken wir noch einige allgemeine Sätze über Winkel voraus, welche in der Lehre von den parallelen Linien vorzüglich angewendet werden.

§ 38. Lehrsatz.

Wenn zwei Linien von einer dritten durchschnitten werden und ein Paar Gegenwinkel gleich sind, so sind auch die übrigen Gegenwinkel gleich, und die Wechselwinkel sind gleich, und von den Ergänzungswinkeln beträgt jedes Paar einen flachen Winkel.

Beweis. Es sei Winkel a = e (Fig. 16) gegeben, und ich will zuerst ein Paar Gegenwinkel b und f als gleich erweisen. — Der Winkel b ist der Nebenwinkel von a, und f ist der Neben-

winkel von e; a ist = e vorausgesetzt, folglich muß auch b = f sein, denn gleiche Winkel haben gleiche Nebenwinkel nach §. 23. — Eben so läßt sich (mit Benutzung des schon Erwiesenen) zeigen, daß Gegenw. d = h und c = g ist.

Um ferner zu zeigen, daß ein Paar Wechselwinkel a und h gleich sind, sage ich: a ist = e vorausgesetzt und h ist = e als Scheitelwinkel, folglich ist auch a = h. — Eben so läßt sich auch b = g, d = e und c = f erweisen.

Endlich ist noch zu zeigen, daß ein Paar Ergänzungswinkel einen Flachen betragen, z. B. die Winkel a und g. — Die Winkel a und c machen einen Flachen, als Nebenwinkel, und c ist = g erwiesen, folglich machen auch a und g zusammen einen flachen aus. — Eben so wird erwiesen, daß $b + h = \pi$, $d + f = \pi$ und $c + e = \pi$ ist.

§ 39. Lehrsatz.

Wenn ein Paar Wechselwinkel (a und h, Fig. 16) gleich sind, so sind auch die übrigen Wechselwinkel gleich, und die Gegenwinkel sind gleich und jedes Paar der Ergänzungswinkel beträgt einen Flachen.

Beweis. Diesen Satz führe ich auf den vorherg. § zurück, indem ich zeige, daß ein Paar Gegenwinkel, z. B. a und e, gleich sind. Der Winkel a ist = h vorausgesetzt, und der Winkel e ist = h als Scheitelwinkel, folglich muß auch a = e sein. — Da ich nun ein Paar Gegenwinkel als gleich erwiesen habe, so müssen nach dem letzten Satze auch die übrigen Gegenwinkel und die Wechselwinkel gleich sein und jedes Paar der Ergänzungswinkel einen Flachen betragen.

§ 40. Lehrsatz.

Wenn ein Paar Ergänzungswinkel (a und g, Fig. 16) einen Flachen ausmachen, so beträgt auch jedes andere Paar der Ergänzungswinkel einen Flachen, und die Gegenwinkel sind gleich, und die Wechselwinkel sind gleich.

Beweis. Diesen Satz führe ich ebenfalls auf § 38 zurück, indem ich wieder die Gleichheit von ein Paar Gegenwinkeln, z. B. a und e, erweise. — $a + g$ ist $= \pi$ vorausgesetzt, und $e + g$ ist $= \pi$, als Nebenwinkel, folglich bleibt, wenn ich beidemal g abziehe, a = e übrig. — Da ich nun ein Paar Gegenwinkel als gleich erwiesen habe, so ergiebt sich wieder die Richtigkeit aller andern Folgerungen aus § 38.

Erster Cursus.

§ 41. Erklärung.

Wenn zwei Linien AB und AC (Fig. 6) sich schneiden, so haben sie verschiedene Richtungen, und ihre Richtungen weichen um so mehr von einander ab, je größer der Winkel CAB ist, welchen die Linien einschließen. Wenn dagegen der Winkel CAB abnimmt, so weichen die Richtungen AB und AC um so weniger von einander ab, je kleiner dieser Winkel wird, und zwei (unbegrenzte) Linien AB und CD (Fig. 1), welche sich gar nicht schneiden und also keinen Winkel bilden, mit einem Worte: zwei parallele Linien haben dieselbe Richtung.

§ 42. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden § folgt:

1) Zwei Linien, welche einer dritten parallel sind, sind auch unter sich parallel, und

2) eine Linie, welche die eine von zwei parallelen Linien schneidet, muß auch die andere schneiden.

3) Durch einen Punkt außerhalb einer Linie läßt sich mit derselben nur eine einzige Parallele ziehen.

§ 43. Lehrsatz.

Wenn zwei parallele Linien von einer dritten durchschnitten werden, so sind 1) die Gegenwinkel gleich, 2) die Wechselwinkel gleich, und 3) jedes Paar Ergänzungswinkel beträgt einen Flachen.

Beweis. Die gegebenen Parallelen seien AB und CD (Fig. 17) und die schneidende Linie sei EF; es soll nun zunächst erwiesen werden, daß ein Paar Gegenwinkel, z. B. AGE und CHG gleich sind. — Der Winkel AGE zeigt an, wie viel die Linie AB von der dritten Linie EF abweicht, und der Winkel CHG zeigt an, wie viel die Linie CD von EF (an der nehmlichen Seite) abweicht. Da nun nach der Voraussetzung die Linien AB und CD eine gleiche Richtung haben, so müssen sie auch (an derselben Seite) gleichviel von der dritten Richtung EF abweichen; folglich ist Winkel AGE = CHG.

Da nun ein Paar Gegenwinkel als gleich erwiesen sind, so müssen vermöge § 38 auch die übrigen Gegenwinkel und die Wechselwinkel gleich sein und jedes Paar Ergänzungswinkel einen Flachen betragen.

§ 44. Lehrsatz.

Zwei Linien sind dann gewiß parallel, wenn
1) ein Paar Gegenwinkel gleich sind, oder wenn
2) ein Paar Wechselwinkel gleich sind, oder wenn
3) ein Paar Ergänzungswinkel einen Flachen betragen.

Beweis. Es seien zunächst ein Paar Gegenwinkel, z. B. AGE und CHG (Fig. 17), als gleich gegeben, und es soll bewiesen werden, daß die Linien AB und CD parallel laufen. — Der Winkel AGE zeigt an, wie viel die Linie AB von der dritten Linie EF abweicht, und der Winkel CHG zeigt an, wie viel die Linie CD von EF (an der nehmlichen Seite) abweicht. Da nun diese Winkel als gleich vorausgesetzt sind, so weichen die Linien AB und CD um gleichviel von der dritten Linie EF an der nehmlichen Seite ab, sie müssen folglich einerlei Richtung haben, d. h. sie laufen parallel.

Wenn aber ferner ein Paar Wechselwinkel als gleich gegeben sein sollten, oder wenn vorausgesetzt ist, daß ein Paar Ergänzungswinkel einen Flachen betragen, so sind nach § 39 und 40 auch die Gegenwinkel gleich und folglich nach dem eben Bewiesenen die Linien parallel.

Zweiter Cursus.

* § 41. Lehrsatz.

Wenn zwei Linien von einer dritten durchschnitten werden und ein Paar Gegenwinkel oder Wechselwinkel gleich sind oder ein Paar Ergänzungswinkel einen Flachen betragen, so sind die durchschnittenen Linien parallel.

Beweis. Es seien zuerst ein Paar Wechselwinkel, z. B. AGH und DHG (Fig. 17), als gleich gegeben, dann ist nach § 39 auch Winkel BGH = CHG. Wenn ich mir nun die Linienverbindung AGHC so auf DHGB gelegt denke, daß die Linie GH auf HG, d. h. der Punkt G auf H und H auf G fällt, so muß auch der Schenkel AG auf DH fallen, weil Winkel AGH = DHG ist, und der Schenkel HC muß auf BG fallen, weil Winkel CHG = BGH ist. Wenn sich nun die Schenkel BG und DH in einem Punkte schnitten, so müßten sich auch AG und CH in dem nehmlichen Punkte schneiden. Dann schnitten sich aber die ganzen Linien AB und CD in zwei Punkten, welches nach § 5 unmöglich ist. — Eben so wenig können sich die Schenkel AG und CH schnei-

den. Demnach schneiden sich die Linien AB und CD gar nicht und sind folglich parallel.

Daß aber diese Linien auch dann parallel sein müssen, wenn ein Paar Gegenwinkel gleich sind oder ein Paar Ergänzungswinkel einen Flachen betragen, folgt aus § 38 und 40.

* § 42. Lehrsatz.

Wenn zwei Linien parallel sind, so sind

1) die Gegenwinkel gleich,

2) die Wechselwinkel gleich und

3) die Ergänzungswinkel betragen einen Flachen.

Für die Behauptungen dieses Satzes fehlt der wissenschaftliche Beweis; aus § 38, 39 und 40 folgt aber, daß wenn eine derselben erwiesen wird, hierdurch die Richtigkeit der übrigen festgestellt ist. —

Anm. Dieser Beweis, wenn er geführt werden sollte, würde sich wesentlich auf den Begriff der geraden Linie zu stützen haben, und da für diese keine genügende Definition vorhanden ist, auch nicht füglich vorhanden sein kann, da die Vorstellung der geraden Linie eine einfache, unmittelbar gegebene ist, so läßt sich mit Sicherheit annehmen, daß auch in Zukunft kein ganz strenger Beweis für jenen Satz gefunden werden wird. — Ein solcher kann aber auch recht füglich entbehrt werden; denn die Behauptungen des obigen Satzes können als unmittelbar mit der Vorstellung der geraden Linie gegeben angesehen werden, so wie es auch noch Niemanden eingefallen ist, ernstlich an der Richtigkeit dieses Satzes zu zweifeln. —

* § 43. Zusatz.

1) Durch einen Punkt F außerhalb einer Linie CD (Fig. 18) lassen sich mit derselben keine zwei Parallelen AB und KL ziehen; denn wenn man durch den Punkt F und einen willkührlichen Punkt G in CD die Linie EH zieht, so müßte nach dem vorhergehenden Paragraphen Gegenwinkel EFL = EGD und auch Gegenwinkel EFB = EGD sein, welches unmöglich ist. Also können auch nicht die Linien AB und KL beide mit CD parallel sein. — Hieraus folgt:

2) Eine Linie, welche die eine von zwei Parallelen durchschneidet, muß auch die andere schneiden; denn gesetzt sie schnitte dieselbe nicht, so müßte sie mit ihr parallel sein, und es gingen dann durch denselben Punkt zwei Parallelen mit einer dritten.

3) Zwei Linien, welche einer dritten parallel sind, müssen auch unter sich parallel sein; — denn gesetzt sie schnitten sich in irgend einem Punkte, so gingen wieder durch den nehmlichen Punkt zwei Linien, welche ein und derselben dritten parallel wären.

Bemerkung. Aus § 44 folgt, daß bei Linien, welche sich schneiden, weder die Gegenwinkel, noch die Wechselwinkel gleich sein, noch die Ergänzungswinkel einen Flachen betragen können. Von den besonderen Sätzen, welche sich hierüber aufstellen ließen, heben wir hier nur denjenigen heraus, welcher die meiste Anwendung findet.

§ 45. Lehrsatz.

Wenn zwei sich schneidende Linien von einer dritten durchschnitten werden, so betragen die inneren Ergänzungswinkel an der Seite, an welcher sich die Linien schneiden, weniger, an der entgegengesetzten Seite mehr, als einen Flachen.

Beweis. Die gegebenen Linien seien AB und CD (Fig. 18), welche über B und D gehörig verlängert sich schneiden; und es soll bewiesen werden, daß Winkel $BFG + DGF < \pi$, aber $AFG + CGF > \pi$ ist. — Um dieses zu zeigen, ziehe ich durch den Punkt F mit CD eine Parallele KL. — In § 43 haben wir gesehen, daß bei parallelen Linien die Ergänzungswinkel einen Flachen betragen; also betragen die Winkel LFG u. DGF zusammen einen Flachen, und folglich betragen die Winkel BFG und DGF zusammen weniger, als einen Flachen (um das Stück BFL). — An der andern Seite betragen die Winkel KFG und CGF zusammen einen Flachen, (weil $KL \parallel CD$ ist); folglich betragen Winkel AFG und CGF mehr, als einen Flachen (um das Stück AFK).

Bemerkung. Durch Umkehrung des vorhergehenden Satzes entsteht der folgende.

§ 46. Lehrsatz.

Wenn zwei Linien AB und CD (Fig. 19) von einer dritten EH durchschnitten werden und ein Paar Ergänzungswinkel m und n zusammen weniger, als einen Flachen betragen, so müssen sich die Linien AB und CD durchschneiden, und zwar an derjenigen Seite, an welcher diese Winkel liegen, (also hier in der Figur an der rechten Seite).

Beweis. Die Linien AB und CD können nicht parallel sein, denn sonst müßten nach § 43 die Winkel m und n zusammen einen Flachen betragen, welches gegen die Voraussetzung streitet; die Linien AB und CD können sich auch nicht an der linken Seite schneiden, denn sonst müßten die Winkel m und n nach dem vorhergeh. § mehr, als einen Flachen betragen, welches ebenfalls gegen die Voraussetzung ist. — Da nun die Linien AB und CD

nicht parallel sein und sich auch nicht an der linken Seite schneiden können, so bleibt nichts Anderes übrig, als daß sie sich rechts durchschneiden.

Bemerkung. Die folgenden Sätze enthalten Anwendungen der vorhergehenden allgemeinen Sätze über parallele und sich schneidende Linien auf besondere Fälle.

§ 47. Zusatz.

1) Zwei Linien, welche auf einer dritten senkrecht stehen, sind parallel.

2) Ist von zwei Parallelen die eine auf einer dritten senkrecht, so ist die andere auf dieser dritten ebenfalls senkrecht.

3) Aus einem Punkte außerhalb einer Linie kann auf dieselbe nur ein Loth gefällt werden.

4) Zwei Linien, welche auf zwei sich schneidenden Linien senkrecht stehen, müssen sich ebenfalls schneiden.

Beweis 1. Es seien AB und CD (Fig. 20) beide senkrecht auf EF gegeben, und ich soll beweisen, daß sie parallel sind. Hierzu brauche ich nur ein Paar Gegenwinkel, z. B. ABE und CDB, als gleich zu erweisen. Der Winkel ABE ist ein rechter, weil AB $\perp$ EF vorausgesetzt ist, und Winkel CDB ist ebenfalls ein rechter, weil CD $\perp$ EF vorausgesetzt ist. Alle rechten Winkel sind einander gleich; folglich ist Winkel ABE = CDB, und da ich nun ein Paar Gegenwinkel als gleich erwiesen habe, so sind die Linien AB und CD nach § 44 parallel.

2. Wenn AB $\parallel$ CD ist und AB $\perp$ EF steht, so muß auch CD $\perp$ EF sein. — Ich muß also zu erweisen suchen, daß einer von den Winkeln, welche CD mit EF bildet, z. B. daß Winkel CDB ein rechter ist. Der Winkel CDB ist = ABE, weil CD $\parallel$ AB vorausgesetzt ist und bei parallelen Linien nach § 43 die Gegenwinkel gleich sind. Der Winkel ABE ist ein rechter, weil AB $\perp$ EF vorausgesetzt ist. Da nun Winkel CDB = ABE und Winkel ABE ein rechter ist, so muß auch CDB ein rechter sein, d. h. die Linie CD steht senkrecht auf EF.

3) Wenn die Linien CD und CE (Fig. 43), welche sich im Punkte C vereinigen, beide auf AB senkrecht ständen, so müßten sie nach Nro. 1 parallel sein. Dieses thun sie aber nicht, da sie sich schneiden. Demnach ist es nicht möglich, daß auf eine Linie aus einem außerhalb gegebenen Punkte zwei Lothe gefällt werden.

4. Wenn die Linien DE und FG (Fig. 21) auf den sich schneidenden Linien AB und BC senkrecht stehen, so müssen sie sich

ebenfalls schneiden. Denn gesetzt die Lothe DE und FG wären parallel, so müßte die (verlängerte) FG auch auf der (verlängerten) AB im Punkte H nach Nro. 2 senkrecht stehen, weil DE ⊥ AB vorausgesetzt ist. Nun ist aber die Linie FG nach der Voraussetzung ein Loth auf BC und kann folglich nicht auf AH senkrecht stehen, weil sonst von einem Punkte B zwei Linien BG und BH ausgingen, welche beide auf derselben dritten FH senkrecht ständen, welches nach Nro. 3 unmöglich ist. Demnach können auch die Lothe DE und FG nicht parallel sein, sondern müssen sich schneiden.

Anm. Die Figur 21 ist für den Fall gezeichnet, daß der Winkel ABC ein stumpfer ist. Der so eben geführte Beweis bleibt jedoch auch richtig, wenn dieser Winkel ein spitzer ist (mit dem einzigen Unterschiede, daß man dann nicht nöthig hat, die Linien AB und FG zu verlängern, indem sich dieselben ohnedieß durchschneiden).

Bemerkung. Beweise, wie die für Nro. 3 und 4 des vorhergeh. § und in § 46 geführten, nennt man indirecte Beweise zum Unterschiede von den directen Beweisen. — Bei diesen wird die zu erweisende Behauptung unmittelbar aus den vorhergehenden Sätzen abgeleitet; bei den indirecten geschieht dieses so, daß man das Gegentheil von der zu erweisenden Behauptung annimmt und dann zeigt, daß diese Annahme zu Widersprüchen mit den schon früher als richtig erkannten Sätzen führen würde.

§ 48. Zusatz.

Winkel, deren Schenkel parallel laufen und vom Scheitelpunkte nach derselben Seite hin gezogen sind, sind gleich.

Beweis. Wenn AB ∥ DE und BC ∥ EF (Fig. 22) gegeben ist, so muß Winkel ABC = DEF sein. — Da nach § 43 bei parallelen Linien die Gegenwinkel gleich sind, so suche ich Gegenwinkel zu bilden. Diese erhalte ich, wenn ich AB über B und EF über E verlängere, bis sie sich im Punkte G schneiden. Nun sind die entstandenen Gegenwinkel ABC und BGE einander gleich, weil BC ∥ EG vorausgesetzt ist, und eben so die Gegenwinkel DEF und BGE einander gleich, weil DE ∥ BG vorausgesetzt ist. Da nun Winkel ABC = BGE und BGE = DEF erwiesen ist, so muß auch ABC = DEF sein.

Uebungsfrage 1. Wie läßt sich dasselbe mit Benutzung der Wechselwinkel oder der Ergänzungswinkel beweisen?

2. Was gilt von Winkeln, deren Schenkel zwar parallel laufen, aber entweder ein Paar oder beide Paare von den Scheitelpunkten aus nach verschiedenen Seiten hin gezogen sind? —

Vierter Abschnitt.
Von den Figuren im Allgemeinen.

§ 49. Erklärung.

Eine überall begrenzte Fläche heißt eine Figur. Die Figuren werden so wie die Flächen in ebene und unebene eingetheilt.

In der Planimetrie kann natürlich nur von ebenen Figuren die Rede sein.

Man theilt die ebenen Figuren wieder ein in geradlinige, krummlinige und gemischtlinige, je nachdem sie von geraden oder von krummen Linien oder von beiden zugleich eingeschlossen werden.

§ 50. Lehrsatz.

Zwei gerade Linien können keine Figur einschließen.

Beweis. Wenn die beiden geraden Linien AB und AC (Fig. 6) eine Figur einschließen sollten, so müßten sie sich, außer in A, nochmals schneiden, welches nach § 5 unmöglich ist.

§ 51. Erklärung.

Die geraden Linien, welche die Grenzen einer geradlinigen Figur bilden, nennt man Seiten, alle Seiten zusammen heißen Umfang oder Perimeter. Die Punkte, in welchen zwei Seiten zusammenstoßen, werden Ecken genannt, wovon die geradlinigen Figuren auch den Namen Vielecke oder Polygone führen.

Sie zerfallen nach der Anzahl ihrer Seiten (oder Ecken) in Dreiecke, Vierecke, Fünfecke u. s. w.

Eine Linie, welche zwei Ecken eines Vielecks verbindet, welche nicht in derselben Seite liegen, heißt Diagonale.

§ 52. Erklärung.

Die einfachste krummlinige Figur ist die vom Kreise eingeschlossene ebene Fläche, welche man Kreisfläche oder auch schlechthin Kreis nennt. Die einschließende krumme Linie nennt man zum Unterschiede hiervon auch Kreislinie oder Peripherie.

Beispiele von gemischtlinigen Figuren sind der Kreisabschnitt, welcher von einem Bogen und der zugehörigen Sehne begrenzt wird, und der Kreisausschnitt, welcher von zwei Radien und dem zwischenliegenden Bogen eingeschlossen ist. — Ein Kreisabschnitt, welcher von einem Durchmesser und der halben Kreislinie begrenzt ist, wird auch Halbkreis genannt.

§ 53. **Erklärung.**

Zwei Figuren heißen congruent (≅), wenn sie sich so auf-einander legen lassen, daß ihre Grenzen sich decken.

Fünfter Abschnitt.

Von den Dreiecken.

A. Von den Seiten und Winkeln eines Dreiecks.

§ 54. **Erklärung.**

Ein Dreieck, welches drei gleiche Seiten hat, heißt gleichseitig, und ein Dreieck, in welchem zwei Seiten einander gleich sind, heißt gleichschenklig *); ist in einem Dreiecke keine Seite der andern gleich, so wird dasselbe ungleichseitig genannt.

In jedem Dreieck pflegt man eine Seite als Grundlinie anzunehmen und nennt dann die beiden andern Seiten vorzugsweise Seiten; die der Grundlinie gegenüberliegende Ecke heißt die Spitze und ein aus der Spitze auf die Grundlinie oder ihre Verlängerung gefälltes Loth die Höhe des Dreiecks.

Im gleichschenkligen Dreiecke nimmt man gewöhnlich die ungleiche Seite als Grundlinie an.

§ 55. **Erklärung.**

In Hinsicht der Winkel theilt man die Dreiecke ein in rechtwinklige, stumpfwinklige und spitzwinklige. — Rechtwinklig heißt ein Dreieck ABC (Fig. 24), welches einen rechten Winkel A hat; die den rechten Winkel einschließenden Seiten AB und AC heißen Catheten und die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite BC wird Hypotenuse **) genannt. Stumpfwinklig heißt ein Dreieck ABC (Fig. 26), welches einen stumpfen Winkel A, und spitzwinklig ein solches Dreieck ABC (Fig. 25), welches lauter spitze Winkel hat. — Spitzwinklige und stumpfwinklige Dreiecke führen auch den gemeinschaftlichen Namen: schiefwinklige Dreiecke.

---

*) Die beiden gleichen Seiten AC und BC (Fig. 28) sind nehmlich Schenkel desselben Winkels ACB.

**) Von ὑποτείνω = subtendo; also nicht Hypothenuse, wie man so häufig liest.

§ 56. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke betragen alle Winkel zusammen einen Flachen.

Beweis. Um zu zeigen, daß die drei Winkel des Dreiecks ABC (Fig. 23) zusammen einen Flachen ausmachen, muß ich diese Winkel in einem Punkte zu vereinigen suchen. Dieses erhalte ich, wenn ich durch eine Ecke C mit der gegenüberliegenden Seite AB eine Parallele DE ziehe. Dann ist Winkel A = a und B = b, weil DE ∥ AB ist und bei parallelen Linien nach § 43 die Wechselwinkel gleich sind. Die drei Winkel a, b und c machen aber zusammen den flachen Winkel DCE aus, und da ich statt a auch Winkel A, statt b Winkel B und statt c auch C setzen kann, so betragen folglich auch die drei Winkel A, B und C zusammen einen Flachen.

§ 57. Zusatz.

1) Sind von einem Dreiecke ABC (Fig. 30) zwei Winkel A und B gegeben, so ist hierdurch auch der dritte C bestimmt; dieser wird nehmlich gefunden, wenn ich die Summe der beiden gegebenen Winkel von einem Flachen subtrahire.

2) Wenn in einem Dreiecke ABC (Fig. 24) ein Winkel CAB ein rechter ist, so bleibt für die beiden anderen B und C noch ein rechter übrig; und folglich muß jeder allein weniger, als einen rechten betragen, also spitz sein.

3) Ist in einem Dreiecke ABC (Fig. 26) ein Winkel A ein stumpfer, so bleibt für die beiden andern B und C weniger, als ein rechter übrig, um so mehr muß folglich jeder derselben spitz sein.

4) Wenn zwei Linien AB und CE (Fig. 43) mit einander schiefe Winkel bilden, und man fällt aus einem Punkte C der einen CE ein Loth auf die andere AB, so muß dieses auf die Seite des spitzen Winkels AEC fallen. — Denn angenommen, es wäre möglich, daß das Loth, aus C auf AB gefällt, auf die Seite des stumpfen Winkels, z. B. auf CF fiele; — dann müßte Winkel EFC ein rechter sein; Winkel CEF ist aber als ein stumpfer vorausgesetzt; und es enthielte folglich das Dreieck CEF einen rechten und einen stumpfen Winkel, welches nach § 56 unmöglich ist. Demnach kann das Loth, aus C auf AB gefällt, nicht auf die Seite des stumpfen Winkels CEB, sondern allein auf die Seite des spitzen Winkels OEA fallen.

5) Wenn daher in einem Dreiecke ABC (Fig. 25) die Win-

kel an der Grundlinie AB beide spitz sind, so muß die Höhe CD innerhalb des Dreiecks fallen.

6) Ist aber ein Winkel an der Grundlinie, z. B. Winkel A im Dreiecke ABC (Fig. 26), ein stumpfer, so muß die Höhe CD (nach Nro. 4) außerhalb des Dreiecks fallen; — und wenn endlich

7) ein Winkel an der Grundlinie, z. B. Winkel A im Dreiecke ABC (Fig. 24), ein rechter ist, so fällt die Höhe mit einer Seite AC zusammen.

§ 58. Lehrsatz.

Wenn man in einem Dreiecke (ABC, Fig. 27) eine Seite (AB) verlängert, so ist der entstandene Außenwinkel (d) so groß, als die inneren gegenüberstehenden Winkel (a und c) zusammen.

Beweis. Der Winkel d macht mit b einen Flachen aus, als Nebenwinkel, und die Winkel a, c und b machen ebenfalls einen Flachen aus, als Winkel eines Dreiecks. Wenn ich nun von beiden Flachen den Winkel b wegnehme, so bleibt das eine Mal d, das andere Mal $a + c$ übrig, folglich muß $d = a + c$ sein; denn da ich Gleiches von Gleichem weggenommen habe, so muß auch Gleiches übrig geblieben sein.

§ 59. Lehrsatz.

Im gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie gleich.

Beweis. Es seien in dem Dreiecke ABC (Fig. 28) die Seiten AC und BC als gleich gegeben, und es soll erwiesen werden, daß auch die Winkel A und B gleich sind, d. h. daß sie sich so aufeinander legen lassen, daß ihr Scheitel und Schenkel sich decken. Um dieses zu zeigen, drehe ich (in Gedanken) das Dreieck ABC so um, daß die Spitze C liegen bleibt und die Seite AC auf BC und BC auf AC fällt; dann muß der Punkt A auf B und B auf A fallen, weil nach der Voraussſ. AC = BC ist. Nun muß auch die Seite AB auf BA fallen, weil der Endpunkt B auf A und A auf B gefallen ist. Demnach ist Winkel CAB = CBA; denn der Scheitel A ist auf B, Schenkel AC anf BC und Schenkel AB auf BA gefallen.

Anm. Wenn man bloß die Winkel A und B, abgetrennt vom Dreiecke, auf einander legen wollte, so würde man aller Hülfsmittel zum Beweise entbehren.

§ 60. Lehrsatz.

Ist in einem Dreiecke eine Seite größer als eine andere, so liegt der größern Seite auch ein größerer Winkel gegenüber.

Beweis. Ist im Dreiecke ABC (Fig. 29) Seite BC > AC, so muß auch Winkel A > B sein. — Ich (verfahre hier, wie im vorhergeh. § und) denke mir das Dreieck ABC so umgedreht, daß der Punkt C liegen bleibt, Seite AC in die Richtung von BC und BC in die Richtung von AC fällt, dann fällt der Punkt A zwischen C und B, z. B. auf a, und der Punkt B fällt über A hinaus, z. B. auf b, weil nach der Voraussſ. BC > AC ist, und die Seite AB fällt auf ab, weil der Punkt A auf a und B auf b gefallen ist. *) — Nun ist ein neues Dreieck aBD entstanden mit dem Außenwinkel CaD. Dieser ist nach § 58 so groß, als die inneren gegenüberstehenden B und D zusammen, und daher (um D) größer, als B allein. Statt des Winkels CaD kann ich aber auch Winkel A setzen, folglich ist Winkel A > B w. z. e. w.

Bemerkung. Durch Umkehrung der beiden vorhergehenden Sätze entstehen die folgenden.

§ 61. Lehrsatz.

1) Sind in einem Dreiecke (ABC, Fig. 28) zwei Winkel gleich (A = B), so sind auch die gegenüberstehenden Seiten gleich (BC = AC), und das Dreieck ist folglich gleichschenklig.

2) Ist in einem Dreiecke (ABC, Fig. 30) ein Winkel größer, als ein anderer (A>B), so liegt ihm auch eine größere Seite gegenüber (BC > AC).

Die Beweise dieser beiden Sätze führe ich indirect.

1) Die Seite BC (im Dreiecke ABC, Fig. 28) kann erstens nicht größer, als AC sein, weil sonst nach § 60 auch Winkel A> B sein müßte, welches der Voraussetzung widerspricht; und die Seite BC kann zweitens nicht kleiner, als AC sein, weil sonst nach demselben § Winkel A<B sein müßte, was ebenfalls gegen die Voraussetzung ist. — Demnach bleibt drittens nichts Anderes übrig, als daß BC = AC ist.

2) Die Seite BC (im Dreiecke ABC, Fig. 30) kann erstens nicht gleich AC sein, weil sonst nach § 59 auch Winkel A = B sein müßte, welches gegen die Voraussetzung streitet, und die Seite BC kann auch nicht kleiner, als AC sein, weil sonst nach § 60 auch Winkel A < B sein müßte, was ebenfalls gegen die Voraus-

*) Da bei diesem Zusammenlegen der Winkel A und B der Scheitelpunkt A nicht auf B gefallen ist, so lassen sich die beiden Winkel auf diese Art zwar nicht unmittelbar, wohl aber mittelbar mit Zuziehung früherer Sätze vergleichen.

setzung ist. Demnach bleibt drittens nichts Anderes übrig, als daß BC > AC ist, w. z. e. w.

§ 62. Zusatz.

1) Da man im gleichseitigen Dreiecke (ABC, Fig. 31) jede Seite als Grundlinie annehmen kann, so müssen in demselben auch alle Winkel nach § 59 einander gleich sein; folglich ist jeder gleich dem dritten Theile eines Flachen oder = 60°.

2) Eben so folgt aus § 61, 1, daß ein Dreieck gleichseitig sein muß, wenn alle Winkel desselben als gleich gegeben sind.

3) Im gleichschenkligen Dreiecke (ABC, Fig. 28) sind die Winkel an der Grundlinie (AB) allemal spitz; — denn wenn einer von ihnen ein rechter oder stumpfer wäre, so müßte dasselbe auch von dem andern gelten; nach § 57 kann aber ein Dreieck niemals zwei rechte oder zwei stumpfe Winkel enthalten.

4) Da im rechtwinkligen Dreiecke der rechte Winkel der größte ist, so muß ihm auch nach § 61, 2 die größte Seite gegenüber liegen; folglich ist die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreiecke größer, als jede Cathete. Eben so ist

5) im stumpfwinkligen Dreiecke diejenige Seite am größten, welche dem stumpfen Winkel gegenüber liegt.

§ 63. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten größer, als die dritte.

Beweis 1. In dem Dreiecke ABC (Fig. 30) ist AC + BC > AB, weil nach § 6 die gerade Linie AB die kürzeste Verbindung der beiden Punkte A und B ist und folglich kürzer sein muß, als AC und BC zusammen.

* Beweis 2. Man verlängere AC um CD = BC (Fig. 32) und ziehe BD; dann ist Winkel ABD > CBD und Winkel CBD = CDB, weil BC = CD ist, folglich auch Winkel ABD > ADB, daher im Dreiecke ABD nach § 61, 2 Seite AD > AB, oder da AD = AC + CD = AC + BC ist, AC + BC > AB.

§ 64. Zusatz.

Der Unterschied zweier Seiten eines Dreiecks ist kleiner, als die dritte Seite.

Beweis. Das gegebene Dreieck sei ABC (Fig. 33) und es soll erwiesen werden, daß AB — BC < AC ist. — Ehe ich dieses beweisen kann, muß ich vorher den Unterschied zwischen AB und

BC suchen; diesen erhalte ich, indem ich um B mit BC einen Kreis beschreibe, welcher AB in D durchschneidet; dann ist AD der gesuchte Unterschied. — In dem vorhergeh. § ist erwiesen, daß AC + BC > AD + BD ist; nun kann ich aber auf beiden Seiten die gleichen Stücke BC und BD weglassen, dann bleibt AC > AD übrig, w. z. e. w.

§ 65. Zusatz.

Wenn über derselben Grundlinie (AB) zwei Dreiecke (ABC u. ADB, Fig. 34 u. 35) errichtet sind und

1) ein Paar Seiten dieser Dreiecke sich durchschneiden, so ist die Summe der sich schneidenden Seiten größer, als die Summe der sich nicht schneidenden (AD + BC > AC + BD, Fig. 34) wenn aber

2) die Seiten des einen die Seiten des andern einschließen, so ist die Summe der einschließenden Seiten größer, als die Summe der eingeschlossenen (AC + BC > AD + BD, Fig. 35).

Beweis 1) Um zu beweisen, daß die sich schneidenden Seiten AD u. BC (Fig. 34) zusammen größer sind, als die sich nicht schneidenden AC u. BD, nehme ich die beiden kleinen Dreiecke ACE und BDE zu Hilfe und wende auf dieselben den Satz an: In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten größer, als die dritte. Folglich ist in dem △ ACE: AE + CE > AC
und in dem △ BDE: BE + DE > BD.
Jetzt addire ich das Größere zum Größeren und das Kleinere zum Kleineren; dann erhalte ich

$$AE + CE + BE + DE > AC + BD.$$

Statt AE + DE kann ich aber kürzer AD und statt CE + BE kürzer BC setzen; so ergiebt sich

$$AD + BC > AC + BD,$$ w. z. e. w.

2) Um zu zeigen, daß die einschließenden Seiten AC und BC (Fig. 35) zusammen größer sind, als die eingeschlossenen AD u. BD, verlängere ich eine der eingeschlossenen Seiten, z. B. AD über den Punkt D, bis sie die Seite BC im Punkte E trifft. Hierdurch sind zwei kleinere Dreiecke ACE und BDE entstanden, auf welche ich wieder den Satz anwende: In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten größer, als die dritte. Also ist hier in dem
△ ACE: AC + CE > AD + DE
und in dem △ BDE: BE + DE > BD.
Nun addire ich das Größere zum Größeren und das Kleinere zum Kleineren, so ergiebt sich

AC + CE + BE + DE > AD + DE + BD.

Jetzt kann ich aber auf beiden Seiten das Gleiche DE weglassen und statt CE + BE kürzer BC setzen; dann erhalte ich

AC + BC > AD + BD.

B. Von der Congruenz der Dreiecke. *)

§ 66. Lehrsatz. (Erster Congruenzfall.)

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, und es sind dann auch die übrigen Seiten und Winkel in beiden Dreiecken gleich groß.

Beweis. Es sei also in den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 36) Seite AB = DE, AC = DF und Winkel A = D gegeben, und es soll bewiesen werden, daß △ ABC ≌ DEF ist, (das heißt nach § 53, daß sie sich so auf einander legen lassen, daß ihre Grenzen sich decken.) Ich lege daher △ ABC so auf DEF, daß der Punkt A auf D und Seite AB in die Richtung von DE fällt, dann muß 1) auch der Punkt B auf E fallen, weil nach der Voraussetzung Seite AB = DE ist; 2) muß auch die Seite AC in die Richtung von DF fallen, weil Winkel A = D vorausgesetzt ist; 3) muß der Punkt C auf F fallen, weil S. AC = DF vorausg. ist, und endlich 4) fällt die Seite BC auf EF, weil der Punkt B auf E und C auf F gefallen ist. Demnach ist △ ABC ≌ DEF. — Ferner ist auch Seite BC = EF, weil ihre Endpunkte, und Winkel B = E und C = F, weil ihre Scheitel und Schenkel zusammengefallen sind, w. z. e. w.

Bemerkung. Wir haben im Vorhergehenden das △ ABC so auf das △ DEF gelegt, daß der Punkt A auf D fiel. Hierdurch war aber die Lage des △ ABC noch keineswegs fest bestimmt; vielmehr konnte man jetzt noch das △ ABC willkührlich um den Punkt D drehen. Erst nachdem wir noch die Bedingung hinzugefügt hatten, daß die Seite AB in die Richtung von DE fallen sollte, lag das △ ABC wirklich fest, und wir waren nun nicht mehr im Stande, die übrigen Stücke nach Willkühr zu legen; vielmehr blieb uns jetzt weiter nichts übrig, als zuzusehen, wo die

---

*) Man gelangt zur Auffindung der folgenden Congruenzsätze, wenn man sich denkt, man habe von einem Dreiecke alle Seiten und Winkel gemessen, und nun versucht, das Dreieck mit Hülfe dieser Stücke abzuzeichnen. Man findet dann leicht, daß man für diesen Zweck nicht aller sechs Stücke bedarf, sondern mit dreien derselben ausreicht.

übrigen Ecken und Seiten des △ ABC nach den Bedingungen der Voraussetzung hinfielen. —

So oft überhaupt zwei Figuren geometrisch auf einander gelegt werden, gilt die Regel, daß man einen Punkt und eine Seite zusammenlegt und dann zusieht, wo die übrigen Stücke hinfallen. —

§ 67. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke sind ferner congruent, wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen, und es sind dann auch die übrigen Seiten und Winkel in beiden Dreiecken gleich groß.

Beweis. Es sei in den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 36) Seite AB = DE, Winkel A = D und Winkel B = E. Um nun zu zeigen, daß die beiden Dreiecke einander congruent sind, lege ich, so wie im vorherg. §, das Dreieck ABC so auf DEF, daß der Punkt A auf D und Seite AB in die Richtung von DE fällt, dann muß 1) auch der Punkt B auf E fallen, weil AB = DE vorausges. ist; 2) muß Seite AC in die Richtung von DF fallen, weil Winkel A = D gegeben ist; 3) muß Seite BC in die Richtung von EF fallen, weil Winkel B = E gegeben ist, und endlich 4) muß auch der Punkt C auf F fallen, weil die sich in C schneidenden Linien AC und BC mit den sich in F schneidenden Linien DF und EF zusammen gefallen sind. Demnach ist △ ABC ≅ DEF. — Ferner ist auch Seite AC = DF und BC = EF, weil ihre Endpunkte, und Winkel C = F, weil Scheitel und Schenkel zusammen gefallen sind.

§ 68. Zusatz.

Zwei Dreiecke (ABC u. DEF, Fig. 36) sind auch dann congruent, wenn sie in einer Seite (AB = DE), einem anliegenden Winkel (A = D) und dem gegenüberliegenden Winkel (C = F) übereinstimmen.

Den Beweis dieses Satzes führe ich auf den vorhergehenden zurück mit Hilfe des Satzes (§ 57, 1): Sind in einem Dreiecke zwei Winkel gegeben, so ist hierdurch auch der dritte bestimmt. Da nehmlich Winkel A = D und C = F gegeben ist, so muß auch der dritte Winkel B = E sein. Nun sind die Dreiecke nach dem letzten Lehrsatze congruent, weil sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen, nehmlich

S. AB = DE } vorausgesetzt,
W. A = D }
W. B = E erwiesen,

folglich △ABC ≌ DEF, w. z. e. w.

§ 69. Zusatz.

Wenn man die beiden letzten Sätze zusammenfaßt, so ergiebt sich der folgende Satz, als

Zweiter Congruenzfall:

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen.

Bemerkung. Wie man sehr leicht sieht, müssen zwei Dreiecke auch dann congruent sein, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen. Versucht man aber unter dieser Voraussetzung die beiden Dreiecke ABC und DEF (Fig. 36) auf einander zu legen, nehmlich Punkt A auf D und Seite AB auf DE, so muß zwar allerdings auch Punkt B auf E fallen, weil AB = DE gegeben ist; aber über die Lage der Linien AC und BC läßt sich nichts Bestimmtes sagen, weil in der Voraussetzung über die Größe der Winkel A und D und der Winkel B und E nichts festgestellt ist. Andererseits begreift man jedoch sehr bald, daß z. B. die Winkel A und D nicht ungleich sein können, weil sonst die Seiten BC und EF einander nicht gleich sein könnten. Diese Ueberlegung führt auf den folgenden Lehrsatz, auf welchen sich der Beweis des dritten Congruenzfalles stützt. —

§ 70. Lehrsatz.

Sind in zwei Dreiecken je zwei Seiten gleich, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so liegt dem größern Winkel auch eine größere Seite gegenüber.

Beweis. Es sei in den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 37) Seite AB = DE, Seite AC = DF, aber der Winkel A > D, so ist zu beweisen, daß auch Seite BC > EF ist. Um diese beiden Linien mit einander vergleichen zu können, lege ich die Dreiecke ABC und DEF *) so auf einander, daß ein Paar gleiche Seiten, z. B. AB und DE sich decken. Hierbei sind jedoch drei Fälle zu

*) Wollte ich nur die Linien BC und EF ohne die Dreiecke auf einander legen, so würde ich aller Hülfsmittel zum Beweise entbehren.

unterscheiden; es kann nehmlich Winkel B kleiner, eben so groß oder größer, als Winkel E sein.

Es sei erstens Winkel $B < E$, (Fig. 37, a). Nun lege ich das Dreieck DEF so auf ABC, daß der Punkt D auf A und die Seite DE auf AB fällt; dann fällt auch der Punkt E auf B, weil nach der Voraussſ. $AB = DE$ ist; aber die Seite DF fällt zwischen AB und AC, angenommen auf AG, weil der Winkel $D < A$ vorausgesetzt ist, und die Seite EF fällt über BC hinaus auf BG *), weil nach der Annahme Winkel $E > B$ ist. — Jetzt sind zwei Dreiecke ABC und ABG entstanden, welche die Grundlinie AB gemeinschaftlich haben und in denen sich zwei Seiten AG und BC durchschneiden. Nach § 65 ist die Summe der sich schneidenden Seiten größer, als die Summe der sich nicht schneidenden Seiten, also

$$AG + BC > AC + BG.$$

Da $AG = DF$ gemacht und $DF = AC$ vorausgesetzt ist, so ist auch $AG = AC$. Wenn ich daher das Gleiche AG und AC auf beiden Seiten weglasse, so bleibt übrig:

$$BC > BG,$$

oder, da ich statt BG auch EF setzen kann:

$$BC > EF, \text{ w. z. e. w.}$$

Wenn zweitens Winkel $B = E$ ist, so muß, da Winkel $A > D$ vorausgesetzt ist, und in jedem Dreiecke die drei Winkel einen Flachen betragen, Winkel $C < F$ sein, und dieses muß um so mehr der Fall sein, wenn drittens Winkel $B > E$ sein sollte. — Da hiernach in dem zweiten und dritten Falle Winkel $C < F$ ist, so werde ich in diesen beiden Fällen, wenn ich die beiden Dreiecke ABC und DEF (nicht mit den beiden Seiten AB und DE, sondern) mit den Seiten AC und DF zusammenlege, den Beweis ganz eben so führen können, wie dieß unter Nro. 1 geschehen ist.

Anm. Wenn man im zweiten Falle, wo Winkel $B = E$ ist, (Fig. 37, b), die Dreiecke ABC u. DEF mit den gleichen Seiten AB und DE zusammenlegt, so fällt die Seite EF auf BC und der Punkt F zwischen B und C auf G, woraus dann unmittelbar $EF > BC$ hervorgeht.

Legt man eben so im dritten Falle, wo Winkel $F < B$ ist, (Fig. 37, c), die Dreiecke ABC und DEF mit den gleichen Seiten AB und DF zusammen, so fällt die Seite EF zwischen AB und BC, angenommen auf BG. Dann ist in den entstandenen Dreiecken ABC und ABG, welche die gemeinschaftliche Grundlinie AB haben, nach § 65 die Summe der

*) Da die Seite EF nicht auf BC gefallen ist, so lassen sich diese Linien zwar nicht unmittelbar, wohl aber mittelbar durch Anwendung früherer Sätze auf die entstandenen Dreiecke vergleichen.

einschließenden Seiten größer, als die Summe der eingeschlossenen, also AC + BC > AG + BG,
oder wenn ich das Gleiche AC und AG weglasse

BC > BG,

folglich auch BC > EF.

§ 71. Lehrsatz. (Dritter Congruenzfall.)

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.

Beweis. Es sei in den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 36) Seite AB = DE, AC = DF u. BC = EF, und es soll bewiesen werden, daß Dreieck ABC ≅ DEF ist. — Ich brauche hier nur ein Paar Winkel, z. B. die Winkel A und D als gleich zu erweisen. Der Winkel A kann nicht > D sein, weil sonst nach dem vorherg. §. auch Seite BC > EF sein müßte, welches der Voraussetzung widerspricht; und da eben so wenig Winkel A < D sein kann, so muß folglich Winkel A = D sein. Nun sind die beiden Dreiecke ABC u. DEF congruent, weil sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, nehmlich

Seite AB = DE } vorausgesetzt
Seite AC = DF }
und Winkel A = D erwiesen,

folglich △ ABC ≅ DEF nach §. 66 w. z. b. w.

Bemerkung. Durch Umkehrung von § 70 geht der folgende § hervor.

§ 72. Lehrsatz.

Sind in zwei Dreiecken je zwei Seiten gleich, die dritten Seiten aber ungleich, so liegt der größern Seite auch ein größerer Winkel gegenüber.

Beweis. Es sei in den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 37) Seite AB = DE, AC = DF, aber BC > EF, so muß auch W. A > D sein. — Die Richtigkeit dieser Behauptung läßt sich leicht indirect darthun. Der Winkel A kann nehmlich nicht = D sein, weil sonst die beiden Dreiecke in zwei Seiten (AB = DE u. AC = DF n. d. V.) und dem eingeschlossenen Winkel (A = D n. d. Annahme) übereinstimmten und folglich nach §. 66 congruent wären, also auch Seite BC = EF sein müßte, welches der Voraussetzung widerspricht. — Der Winkel A kann auch nicht < D sein; denn dann müßte nach §. 70 S. BC < EF sein, welches ebenfalls gegen die Voraussetzung streitet. — Da nun Winkel A weder =,

noch < D sein kann, so bleibt nichts Anderes übrig, als daß Winkel A > D ist, w. z. b. w.

Bemerkung. Wir haben in den vorherg. §§ gesehen, daß zwei Dreiecke congruent sind, wenn sie übereinstimmen

in drei Seiten,

in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel,

in einer Seite und den beiden anliegenden oder einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel.

Die Frage liegt nun sehr nahe, ob zwei Dreiecke nicht auch dann nothwendig congruent sind, wenn sie in zwei Seiten und einem nicht eingeschlossenen Winkel übereinstimmen. Daß dieses nicht unbedingt der Fall ist, zeigt sich, wenn man in einem gleichschenkligen Dreiecke ACG (Fig. 38) die Grundlinie AG beliebig verlängert und den Endpunkt B mit der Spitze C verbindet. So entstehen zwei Dreiecke ABC und BCG, welche in zwei Seiten und einem Winkel an der dritten (nehmlich Seite AC = CG, BC = BC und Winkel B = B) übereinstimmen und doch nichts weniger, als congruent sind. Vielmehr ist Seite AB > BG, Winkel ACB > BCG u. Winkel BAC < BGC. — Zwischen den beiden letzten Winkeln findet jedoch noch eine merkwürdige Beziehung statt. Da nehmlich Winkel BAC = CGA (§. 59) und CGA + BGC = π ist, so folgt hieraus, daß auch Winkel BAC + BGC = π ist. Diese Betrachtungen führen zu dem folgenden Satze.

*§ 73. Lehrsatz.

Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und einem Winkel an der dritten übereinstimmen, so sind die beiden Dreiecke entweder congruent und also auch die beiden andern Winkel an der dritten Seite einander gleich, oder diese beiden Winkel ergänzen sich zu einem Flachen.

Beweis. Es sei in den Dreiecken ABC u. DEF (Fig. 36 u. 38) Seite AC = DF, BC = EF u. Winkel B = E, so sind nur zwei Fälle möglich, entweder die Seiten AB u. DE sind gleich (Fig. 36) oder sie sind ungleich (Fig. 38). — Im ersten Falle stimmen die beiden Dreiecke in allen drei Seiten überein und sind folglich nach § 71 congruent. — Im andern Falle sei AB > DE (Fig. 38); schneiden wir jetzt von AB vom Punkte B aus ein Stück BG = DE ab, so ist nach § 66 $\triangle$ DEF $\cong$ GBC (nehmlich Winkel B = E und Seite BC = EF vorausgesetzt, Seite BG = ED

gemacht), also auch Seite CG = DF. Nun ist aber DF = AC vorausgesetzt, folglich auch AC = CG und daher Winkel CAG = CGA. Die Winkel CGA und CGB ergänzen sich zu einem Flachen; es muß daher auch dasselbe von den ihnen gleichen Winkeln CAG und EDF gelten.

Da das Nehmliche eben so erwiesen werden kann, wenn AB < DE ist, so folgt hieraus die Richtigkeit des obigen Satzes.

Anm. Es ist auch möglich, daß die beiden Winkel A und D in den Dreiecken ABC und DEF des vorherg. § einander gleich sind und sich zu einem Flachen ergänzen. Dieß ist der Fall, wenn diese beiden Winkel rechte sind; natürlich sind dann auch die Dreiecke ABC und DEF (vermöge § 69) congruent. Wenn aber die Winkel A und D weder rechte, noch gleich sind, so muß der eine den rechten Winkel um eben so viel übertreffen, als dem andern zum rechten Winkel fehlt.

*§ 74. Zusatz.

Zwei Dreiecke sind dann gewiß congruent, wenn sie in zwei Seiten und dem der größern von beiden Seiten gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

Beweis. Wenn in den Dreiecken ABC u. DEF (Fig. 36) Seite AC = DF, BC = EF u. Winkel A = D und zugleich Seite BC > AC, also auch Seite EF > DF ist, so sind die Winkel B und E nothwendig beide spitz. Denn wenn einer von ihnen, z. B. B, ein rechter oder stumpfer wäre, so müßte nach § 61, 2 S. AC > BC sein, welches der Voraussetzung widerspricht. Da nun die Winkel B u. E beide spitz sind, so ist es nicht möglich, daß sie sich zu einem Flachen ergänzen, und folglich sind die Dreiecke ABC und DEF nach dem vorhergeh. § congruent.

Bemerkung. Die vorhergehenden Sätze gelten von allen Dreiecken, die nun folgenden Sätze betreffen besondere Arten von Dreiecken.

C. Von den rechtwinkligen Dreiecken ins Besondere.

Bemerkung. Zwei rechtwinklige Dreiecke (ABC u. DEF, Fig. 41) sind schon dann congruent, wenn sie in den beiden Catheten (AB = DE u. AC = DF) übereinstimmen, da auch die eingeschlossenen Winkel (A u. D), als rechte einander gleich sind. Das rechtwinklige Dreieck wird also durch die Größe seiner beiden Catheten vollständig bestimmt. — Wenn man in einem rechtwinkligen Dreiecke CDE (Fig. 43) eine Cathete DE wachsen, die andere CD ungeändert läßt, so sieht man leicht, daß auch die

Hypotenuse zunimmt, und daß dieses um so mehr der Fall sein wird, wenn man beide Catheten zugleich wachsen läßt. — Diese Ueberlegungen führen zu den nächsten Sätzen.

§ 75. Lehrsatz.

Wenn in zwei rechtwinkligen Dreiecken ein paar Catheten gleich sind, die zweite Cathete des einen Dreiecks aber größer ist, als die zweite Cathete des andern Dreiecks, so ist auch die Hypotenuse im ersten Dreiecke größer, als im zweiten.

Beweis. Wenn in den rechtwinkligen Dreiecken CAB und FDE (Fig. 39) die Cathete AC = DF, aber die Cathete AB > DE ist, so ist auch die Hypotenuse BC > EF. — Um diese beiden Linien mit einander vergleichen zu können*), lege ich das Dreieck FDE so auf CAB, daß der Punkt D auf A und Seite DF auf AC fällt; dann fällt auch der Punkt F auf C, weil AC = DF vorausgesetzt ist, und die Seite DE fällt in die Richtung von AB, weil Winkel A = D = 90° vorausgesetzt ist; aber der Punkt E fällt zwischen A und B, z. B. auf G, weil nach der Voraussetzung DE < AB ist. Nun fällt die Linie EF auf CG. — Die beiden zu vergleichenden Linien BC und CG liegen jetzt in demselben Dreiecke BCG zusammen. In diesem ist Winkel CGB ein stumpfer, weil sein Nebenwinkel CGA ein spitzer ist, und dieser ist ein spitzer, weil er in dem rechtwinkligen Dreiecke CAG an der Hypotenuse liegt. Da nun Winkel CGB ein stumpfer ist, so ist die Seite BC die größte in dem Dreiecke BCG und folglich größer, als CG. Statt CG kann ich aber auch EF setzen; also ist BC > EF, w. z. b. w.

§ 76. Lehrsatz.

Wenn in einem rechtwinkligen Dreiecke beide Catheten größer sind, als in einem andern, so ist auch die Hypotenuse im ersten Dreiecke größer, als im zweiten.

Beweis. Wenn in den rechtwinkligen Dreiecken CAB und FDE (Fig. 40) Cathete AC > DF und Cathete AB > DE ist, so muß auch die Hypotenuse BC > EF sein. — Die Richtigkeit dieser Behauptung läßt sich leicht mit Hülfe des vorhergehenden Satzes darthun. Wenn ich nehmlich von der Cathete AB vom Punkte A aus ein Stück AG = DE abschneide und den Endpunkt G mit C

*) Vergleiche die Anmerkungen zu § 70.

verbinde, so entsteht ein drittes rechtwinkliges Dreieck CAG, welches ich mit den beiden gegebenen Dreiecken, da es mit jedem in einer Cathete übereinstimmt, nach dem vorherg. § vergleichen kann. Zuerst vergleiche ich das Dreieck CAG mit CAB; die Cathete AC ist beiden gemeinschaftlich, aber die Cathete AB ist > AG; folglich ist nach dem vorherg. § auch die Hypotenuse BC > CG. — Zweitens vergleiche ich das Dreieck CAG mit FDE; die Cathete AG ist = DE gemacht, aber die Cathete AC ist > DF vorausgesetzt; folglich ist wieder nach dem vorherg. § die Hypotenuse CG > EF. — Da nun Hypotenuse BC > CG und CG > EF ist, so ist folglich auch BC > EF, w. z. b. w.

§ 77. Lehrsatz.

Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn sie in der Hypotenuse und einer Cathete übereinstimmen.

*Beweis 1. Dieser Satz ist ein besonderer Fall von § 74.

Beweis 2. Es sei in den rechtwinkligen Dreiecken ABC und DEF (Fig. 41) Hypotenuse BC = EF und Cathete AB = DE, so werden die beiden Dreiecke gewiß congruent sein, wenn ich erweisen kann, daß auch die Cathete AC = DF ist. Dieses folgt aber leicht indirect mit Hülfe von § 75. Wollte ich nehmlich annehmen, daß die Cathete AC > oder < DF wäre, so müßte nach dem angeführten Paragraphen auch die Hypotenuse BC > oder < EF sein, welches der Voraussetzung widerspricht. Demnach muß AC = DF sein. Nun sind die beiden Dreiecke ABC und DEF congruent, weil sie in den drei Seiten übereinstimmen, nehmlich:

$$\left.\begin{array}{l} AB = DE \\ BC = EF \end{array}\right\} \text{vorausgesetzt}$$
$$AC = DF \quad \text{erwiesen,}$$

folglich $\triangle ABC \cong DEF$ nach § 71.

§ 78. Lehrsatz.

Wenn in zwei rechtwinkligen Dreiecken ABC und DEF (Fig. 42) die Hypotenusen BC und EF gleich sind, aber die eine Cathete AB des einen Dreiecks größer ist, als eine Cathete DE des andern Dreiecks, so ist dagegen die zweite Cathete AC des ersten Dreiecks kleiner, als die zweite Cathete DF des andern Dreiecks.

Beweis. Auch diesen Beweis führe ich indirect. Die Cathete AC kann nehmlich nicht = DF sein; denn da die Cathete AB > DE vorausgesetzt ist, so müßte nach § 75 auch die Hypo-

tenuse BC > EF sein, welches der Voraussetzung widerspricht; und die Cathete AC kann eben so wenig > DF sein, denn es müßte dann, (da AB > DE vorausgesetzt ist), nach § 76 die Hypotenuse BC um so mehr > EF sein. Da nun AC nicht = und auch nicht > DF sein kann, so bleibt nichts Anderes übrig, als daß AC < DF ist, w. z. e. w.

Uebungsfrage. Wie zeichnet man zwei rechtwinklige Dreiecke, in denen die Hypotenusen gleich, die Catheten aber ungleich sind?

Anm. Um alle möglichen Beziehungen, welche zwischen den Seiten zweier rechtwinkligen Dreiecke, in ähnlicher Art, wie in den vorherg. §§, aufgestellt werden können, zu erschöpfen, führen wir noch folgende minder wichtige und leicht zu erweisende Sätze an:

1) Sind in zwei rechtwinkligen Dreiecken ein Paar Catheten gleich, und ist die Hypotenuse in dem einen größer, als im andern, so muß auch die zweite Cathete im ersten größer, als im andern Dreiecke sein.

2) Ist in einem rechtwinkligen Dreiecke die Hypotenuse größer, aber eine Cathete kleiner, als in einem andern, so ist die zweite Cathete im ersten Dreiecke größer, als im andern.

§ 79. Zusatz.

Wenn nach einer Linie AB (Fig. 43) von einem außerhalb gegebenen Punkte C mehrere Linien CD, CE, CF . . . gezogen werden, so ist das Loth CD unter allen am kleinsten und heißt daher der Abstand des Punktes von der Linie, und die Linien werden um so größer, je mehr sie sich von dem Lothe entfernen.

Beweis. Die Linie CE ist größer, als das Loth CD, weil das Dreieck CDE rechtwinklig und nach § 62 in einem rechtwinkligen Dreiecke die Hypotenuse größer, als jede Cathete ist. Die Linie CF ist aber noch > CE; denn in den rechtwinkligen Dreiecken CDE und CDF ist

	Cathete CD = CD,
aber	Cathete DF > DE,
folglich	Hypotenuse CF > CE nach § 75.

§ 80. Zusatz.

Aus dem vorherg. § ergeben sich folgende (für die am Schlusse dieses Abschnitts zu behandelnden Aufgaben nützliche) Sätze:

1) Wenn man um einen Punkt C, welcher außerhalb einer Linie AB gegeben ist, mit einem Radius, welcher gleich dem Lothe CD ist, einen Kreis beschreibt, so trifft dieser Kreis die Linie AB

in einem Punkte, nehmlich im Fußpunkte D des Lothes CD; — wenn aber

2) der Radius größer, als das Loth CD ist, so trifft der Kreis die Linie AB in zwei Punkten, welche zu beiden Seiten von D liegen; und wenn

3) der Radius kleiner, als CD ist, so trifft der Kreis mit der Linie AB in keinem Punkte zusammen.

D. Von den gleichschenkligen Dreiecken.

§ 81. Lehrsatz.

1) Die Linie, welche die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Mitte der Grundlinie verbindet, halbirt den Winkel an der Spitze und steht auf der Grundlinie senkrecht.

2) Die Linie, welche den Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks halbirt, halbirt auch die Grundlinie und ist auf derselben senkrecht.

3) Ein Loth aus der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Grundlinie gefällt, halbirt die Grundlinie und den Winkel an der Spitze.

4) Wenn man in der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks ein Loth aufrichtet, so geht dieses durch die Spitze.

5) Ein Dreieck, dessen Grundlinie durch die Höhe halbirt wird, ist gleichschenklig.

Beweis. 1) Das gegebene gleichschenklige Dreieck sei ABC (Fig. 44) mit der Grundlinie AB; wenn nun AD = DB vorausgesetzt wird, so stimmen die beiden Dreiecke ADC und BDC in den drei Seiten überein und sind daher nach § 71 congruent; folglich ist auch Winkel ACD = DCB und Winkel ADC = BDC, also CD ⊥ AB.

2) Wenn Winkel ACD = BCD vorausgesetzt wird, so stimmen die Dreiecke ADC und BDC in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein (AC = BC, CD = CD, Winkel ACD = BCD vorausgesetzt) und sind folglich nach § 66 congruent. Daher ist auch Seite AD = DB und Winkel ADC = BDC, also CD ⊥ AB, w. z. e. w.

3) Wenn CD ⊥ AB vorausgesetzt ist, so sind die Dreiecke ADC und BDC rechtwinklig; und da sie in der Hypotenuse (AC = BC vorausgesetzt) und in einer Cathete (CD gemeinschaftlich)

übereinstimmen, so sind sie nach § 77 congruent; folglich ist auch Cathete AD = BD und Winkel ACD = BCD.

4) Von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugen wir uns auf indirectem Wege. — Angenommen es wäre möglich, in dem Halbirungspunkte D der Grundlinie AB ein Loth DE zu errichten, welches nicht durch die Spitze C geht, so verbinde ich C mit D. Diese Linie CD ist nach Nro. (1) senkrecht auf AB. Folglich kann DE kein Loth sein, sondern das im Punkte D auf AB errichtete Loth muß nothwendig durch die Spitze C gehen.

5) Wenn in einem Dreiecke ABC die Höhe CD die Grundlinie AB halbirt, so muß das Dreieck gleichschenklig sein. — Denn die beiden Dreiecke ADC und BDC sind congruent, weil sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (CD = CD, AD = BD vorausgesetzt, Winkel ADC = BDC = 90°) übereinstimmen; folglich ist auch Seite AC = BC.

Bemerkung. Aus der vorletzten Nummer des eben erwiesenen Satzes folgt, daß wenn über derselben Grundlinie mehrere gleichschenklige Dreiecke errichtet sind, ihre Spitzen sämmtlich in einer geraden Linie liegen, nehmlich in dem auf der Grundlinie in ihrer Mitte errichteten Lothe. Die Dreiecke können an derselben Seite oder an entgegengesetzten Seiten der gemeinschaftlichen Grundlinie liegen. Durch Umkehrung der eben ausgesprochenen Behauptung geht der folgende Satz hervor.

§ 82. Lehrsatz.

Wenn zwei gleichschenklige Dreiecke ABC und ABD (Fig. 45) eine gemeinschaftliche Grundlinie AB haben und man verbindet ihre Spitzen C und D durch eine gerade Linie, so gilt dreierlei:

1) Die Verbindungslinie CD halbirt die Winkel an der Spitze C und D;

2) sie halbirt auch die Grundlinie AB, und

3) sie ist auf derselben senkrecht.

Beweis. Zuerst lassen sich die Dreiecke ACD und BCD als congruent erweisen, weil sie in den drei Seiten übereinstimmen, nehmlich

$$\left.\begin{array}{l} AC = BC \\ AD = BD \end{array}\right\} \text{vorausgesetzt}$$
$$CD = CD$$

folglich $\triangle ACD \cong BCD$ und daher auch

1) Winkel ACD = BCD u. ADC = BDC.

Nun können auch die Dreiecke ACE und BCE*) als congruent erwiesen werden aus Gleichheit zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels, nehmlich

AC = BC vorausgesetzt
CE = CE
Winkel ACE = BCE erwiesen,

folglich $\triangle$ ACE $\cong$ BCE und daher auch
2) Seite AE = BE, also AB in E halbirt,
und Winkel AEC = BEC,
also 3) CE $\perp$ AB.

Anm. Der Beweis ändert sich nur unbedeutend ab, wenn die beiden gleichschenkligen Dreiecke an derselben Seite der gemeinschaftlichen Grundlinie liegen.

E. Aufgaben.

Bemerkung. Alle Sätze, welche im Vorhergehenden enthalten sind, zerfallen in Erklärungen, Grundsätze, Lehrsätze und Zusätze.

Eine Erklärung ist die Angabe der wesentlichen Merkmale eines Begriffs. Ein Grundsatz ist ein Satz, dessen Richtigkeit an sich klar ist, der also weder eines Beweises bedarf, noch eines solchen fähig ist. Ein Lehrsatz ist ein Satz, dessen Richtigkeit sich durch einen Beweis außer Zweifel setzen läßt. — Einen Satz beweisen heißt aber, (wie schon oben S. 11 bemerkt), ihn auf frühere Sätze zurückführen. — Zusätze sind leichtere Lehrsätze, für welche der Beweis eigentlich schon in den vorangehenden Lehrsätzen enthalten ist.

In den nächsten Paragraphen werden wir eine neue Art Sätze, nehmlich Aufgaben, kennen lernen. So wie jeder Lehrsatz eines Beweises bedarf, welcher die Richtigkeit des Satzes zeigt, so bedarf die Aufgabe zunächst einer Auflösung, welche aussagt, wie das in der Aufgabe Geforderte zu erreichen ist; und die Auflösung bedarf dann noch eines Beweises, welcher darthut, daß die Auflösung wirklich das leistet, was in der Aufgabe gefordert wird.

Zwei Aufgaben werden der Auflösung aller andern Aufgaben zu Grunde gelegt und heißen Postulate, nehmlich

*) oder ADE und BDE.

1) Zwischen zwei Punkten eine gerade Linie zu ziehen und eine gerade Linie willkührlich zu verlängern.

2) Um einen gegebenen Punkt in einer Ebene mit einem gegebenen Radius einen Kreis zu beschreiben.

Die Auflösung dieser beiden Aufgaben ist an sich klar; d. h. es ist immer möglich, zwischen zwei gegebenen Punkten eine gerade Linie zu ziehen oder eine gegebene gerade Linie zu verlängern, und mit einem jeden Radius läßt sich um einen Punkt in der Ebene ein Kreis beschreiben. — Alle andern geometrischen Aufgaben werden auf diese beiden zurückgeführt, welches entweder unmittelbar geschehen kann oder mittelbar mit Benutzung solcher Aufgaben, welche bereits durch die Postulate gelöst sind. Eine Aufgabe geometrisch lösen, heißt sie auf die Postulate zurückführen. — Die folgenden Beispiele werden das eben Gesagte erläutern.

Anm. Da die praktische Ausführung dessen, was die Postulate fordern, der Anwendung des Lineals und Cirkels bedarf, so folgt hieraus, daß auch die praktische Auflösung jeder andern geometrischen Aufgabe mit Lineal und Cirkel zu bewerkstelligen ist, und daher die Auflösung einer Aufgabe nicht mehr für rein geometrisch gelten kann, wenn die praktische Ausführung derselben die Anwendung anderer Instrumente erfordert, als Lineal und Cirkel. — Hierbei ist jedoch nicht zu vergessen, daß die Auflösung einer geometrischen Aufgabe, so wie der Beweis eines Lehrsatzes eine rein geistige Operation ist, und daß die äußerlich entworfenen Zeichnungen nur bildliche Träger unserer inneren geistigen Vorstellungen sind, daß in den geometrischen Sätzen bloß von den in unserer Vorstellung existirenden Figuren die Rede ist und eine geometrische Figur nur innerlich angeschaut, niemals äußerlich dargestellt werden kann.

§ 83. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem die drei Seiten gegeben sind.

Auflösung. Die gegebenen Seiten seien a, b u. c (Fig. 46). Man ziehe eine willkührliche Linie, schneide von derselben eine der gegebenen Seiten a = DE ab, beschreibe um den einen Endpunkt D mit b und um den andern Endpunkt E mit c einen Kreis. Diese Kreise schneiden sich in den Punkten F und G. Einen derselben, z. B. F, verbinde man mit D und E, so ist DEF das verlangte Dreieck.

Beweis. Denn die Seite DE ist = a, DF = b und EF = c gemacht.

Anm. Die Bedingungen, welche von den gegebenen Linien a, b und c erfüllt sein müssen, damit die Aufgabe möglich ist, sind unten in § 153 erörtert.

§ 84. Zusatz.

Folgende zwei Aufgaben sind nach Anleitung des vorherg. § sehr leicht zu lösen:

1) Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, von welchem die Grundlinie und eine Seite gegeben sind; und

2) Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, von welchem eine Seite gegeben ist.

§ 85. Aufgabe.

Einen gegebenen Winkel an eine gegebene Linie in einem gegebenen Punkte anzutragen.

Auflösung. Um den Winkel ABC (Fig. 47) an die Linie DE im Punkte D anzutragen, beschreibe ich mit einem beliebigen Radius einen Kreis um B, welcher die Schenkel AB u. AC in den Punkten F und G schneidet, und mit demselben Radius einen Kreis um D, welcher DE in H schneidet; hierauf verbinde ich F u. G (praktisch: messe FG mit dem Cirkel), und beschreibe mit der Linie FG einen Kreis um H, welcher den um D beschriebenen Kreis in zwei Punkten K und L durchschneidet. Einen derselben z. B. K, verbinde ich mit D, so ist Winkel KDH der verlangte.

Beweis. Denn wenn ich KH ziehe, so ist das entstandene Dreieck KDH $\cong$ FBG aus Gleichheit dreier Seiten (DK = BF, DH = BG, KH = FG nach der Construction), folglich auch Winkel KDH = FBG, w. z. e. w.

§ 86. Aufgabe.

Durch einen Punkt G außerhalb einer Linie CD (Fig. 17) mit derselben eine Parallele zu ziehen.

Auflösung. Man wähle in CD einen beliebigen Punkt H und verbinde denselben mit dem gegebenen Punkte G, hierauf verlängere man GH beliebig über G, trage an die Verlängerung EG im Punkte G den Winkel GHD (und zwar an derselben Seite, an welcher Winkel GHD liegt,) an und verlängere den zweiten Schenkel dieses Winkels BG über G um ein beliebiges Stück AG, so ist AB die verlangte Linie.

Beweis. Die Linie AB ist $\parallel$ CD nach § 44, 1, weil Winkel EGB = GHD construirt ist.

Anm. Es braucht kaum gesagt zu werden, daß auch § 44, 2 eine bequeme Auflösung liefert.

§ 87. **Aufgabe.**

Durch einen außerhalb einer Linie AB (Fig. 48) gegebenen Punkt C eine Linie so zu ziehen, daß sie mit AB (nach der Seite von B hin) einen gegebenen Winkel α bildet.

Auflösung. Man wähle in AB einen willkührlichen Punkt D, trage in diesem an DB (an der Seite, an welcher der gegebene Punkt C liegt,) nach § 85 einen Winkel EDB $= \alpha$ an und ziehe durch C die Linie CF $\parallel$ ED, so ist dieses die verlangte Linie.

Beweis. Denn da CF $\parallel$ ED ist, so ist Winkel CFD $=$ EDB und da Winkel EDB $= \alpha$ gemacht ist, so ist auch Winkel CFD $= \alpha$, w. z. e. w.

§ 88. **Aufgabe.**

Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind.

§ 89. **Aufgabe.**

Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind.

Die Auflösungen dieser beiden Aufgaben sind äußerst leicht zu finden und daher hier der Kürze wegen übergangen.

§ 90. **Aufgabe.**

Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem eine Seite α, ein anliegender Winkel β und der gegenüberliegende Winkel γ gegeben sind.

Auflösung. Wenn ich vermittelst § 85 die beiden gegebenen Winkel β und γ addire und diese Summe von einem Flachen subtrahire, so erhalte ich den dritten Winkel des zu zeichnenden Dreiecks, wodurch diese Aufgabe auf die vorhergehende zurückgeführt ist.

Anm. Eine zweite sehr bequeme Auflösung liefert § 87.

*§ 91. **Aufgabe.**

Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem zwei Seiten α und β und der der einen β gegenüberliegende Winkel γ gegeben sind (Fig. 49).

Auflösung. Man zeichne einen Winkel A $= \gamma$, schneide

von dem einen Schenkel vom Scheitelpunkte aus das Stück AC = α ab und beschreibe um C mit β einen Kreis, welcher den andern Schenkel in zwei Punkten B und D durchschneidet; verbindet man dann einen derselben, z. B. B mit C, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Der Beweis ist in der Construction enthalten.

Bedingungen. Wenn man den andern Durchschnittspunkt D mit C verbindet, so entsteht ein zweites, von dem ersten verschiedenes Dreieck ACD, welches ebenfalls die gegebenen Stücke enthält: AC = α, CD = β und Winkel CAD = γ. Die beiden Dreiecke ACD und ACB stimmen also in zwei Seiten und einem Winkel an der dritten überein (Seite AC und Winkel A gemeinschaftlich und Seite CD = CB), und die beiden andern Winkel an der dritten Seite ADC und ABC ergänzen sich zu einem Flachen (vergl. § 73).

Damit aber zwei Dreiecke entstehen können, muß Winkel γ ein spitzer und Seite β kleiner, als α, aber größer, als das aus C auf AB gefällte Loth CE sein.

Ist nehmlich $\beta > \alpha$, so schneidet der um C mit β beschriebene Kreis nach § 80 zum zweiten Male nicht die Linie AB selbst, sondern ihre Verlängerung über A; und die Aufgabe hat dann nur eine Auflösung. Dieses Letztere gilt auch, wenn $\alpha = \beta$ ist.

Ist aber $\beta <$ CE, so trifft der Kreis die Linie AB gar nicht, und die Aufgabe ist überhaupt nicht zu lösen.

Ist $\beta =$ CE, so berührt der Kreis um C die Linie AB in E, und es entsteht ein rechtwinkliges Dreieck ACE.

§ 92. Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie zu halbiren.

Analysis. In § 82 haben wir gesehen, daß wenn zwei gleichschenklige Dreiecke ABC und ABD (Fig. 45) eine gemeinschaftliche Grundlinie AB haben, dieselbe durch die Linie CD, welche die Spitzen der gleichschenkligen Dreiecke verbindet, halbirt wird. Hieraus ergiebt sich folgende

Auflösung, (bei welcher zugleich die praktische Bequemlichkeit der Ausführung berücksichtigt ist.) — Die gegebene Linie sei AB (Fig. 50), man beschreibe mit derselben Kreise um A u. B, welche sich in C u. D durchschneiden, und verbinde diese beiden Punkte durch eine gerade Linie, welche AB in E schneidet, so ist AB in diesem Punkte halbirt.

Beweis. Denn wenn man die Endpunkte A und B mit C und D verbindet, so entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke ABC und ABD mit der gemeinschaftlichen Grundlinie AB; und die Linie CD verbindet ihre Spitzen. In § 82 haben wir gesehen, daß diese Verbindungslinie die gemeinschaftliche Grundlinie halbirt. Folglich ist AB in E halbirt.

Anm. Statt AB könnte man auch jeden beliebigen andern Radius wählen; doch darf derselbe, damit die Kreise sich schneiden, nicht kleiner, als die Hälfte von AB sein.

§ 93. Aufgabe.

Einen gegebenen Winkel zu halbiren.

Die Analysis ist ebenfalls in § 82 enthalten.

Auflösung. Um den Winkel A (Fig. 51) zu halbiren, beschreibe man um den Scheitel A mit einem beliebigen Radius einen Kreis, welcher die Schenkel des Winkels in B und C durchschneidet; hierauf beschreibe man mit demselben Radius um B und C Kreise, welche sich in D schneiden, und ziehe AD, so halbirt diese Linie den gegebenen Winkel A.

Beweis. Denn wenn man BC, BD u. CD zieht, so entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke ABC u. BCD mit der gemeinschaftlichen Grundlinie BC. In § 82 haben wir gesehen, daß die Linie, welche die Spitzen dieser Dreiecke verbindet, die Winkel an der Spitze halbirt. Folglich halbirt die Linie AD den Winkel BAC.

Anm. Man hätte die Kreise um B und C auch mit einem andern Radius als AB beschreiben können; jedoch muß derselbe, damit die Kreise sich schneiden, größer, als $\frac{1}{2}$BC sein.

§ 94. Aufgabe.

Auf einer Linie AB in einem in derselben gegebenen Punkte C ein Loth zu errichten (Fig. 52).

Die Analysis ist in § 81, 1 enthalten.

Auflösung. Man schneide von AB von C aus die beliebigen, aber gleichen Stücke CD und CE ab, beschreibe hierauf mit einem ebenfalls beliebigen Radius, (der aber größer, als CD sein muß), Kreise um D und E, welche sich in F schneiden, und ziehe CF, so ist diese Linie ein Loth auf AB.

Beweis. Denn wenn man DF und EF zieht, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck DEF, dessen Grundlinie DE in C halbirt ist; die Linie FC aber, welche die Spitze mit der Mitte

der Grundlinie verbindet, ist nach § 81, 1 auf der Grundlinie senkrecht.

§ 95. Aufgabe.

Auf eine Linie AB aus einem Punkte F, welcher außerhalb derselben gegeben ist, ein Loth zu fällen (Fig. 52).

Die Analysis ist wieder in § 81, 1 enthalten.

Auflösung. Man wähle in AB einen beliebigen Punkt D, beschreibe mit DF einen Kreis um F, welcher AB zum zweiten Male in E schneidet, halbire nach § 92 DE in C und ziehe CF, so ist dieses das verlangte Loth.

Beweis. Denn wenn man F mit D und E verbindet, so ist Dreieck DEF gleichschenklig, und da die Grundlinie DE in C halbirt ist, so ist nach § 81, 1 CF ein Loth auf DE.

Anm. 1. Sollte der um F mit DF beschriebene Kreis die Linie AB in D berühren, so würde DF selbst nach § 80 das verlangte Loth sein.

Anm. 2. Eine andere bequeme Auflösung ist folgende: Man wähle in der gegebenen Linie einen beliebigen Punkt, errichte in demselben ein Loth nach § 94 und ziehe mit diesem durch den gegebenen Punkt nach § 86 eine Parallele, welches die verlangte Linie ist.

Uebungsaufgaben.

A. Dreiecksaufgaben. *)

Aufgabe 1. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem die Höhe $= \alpha$, eine Seite $= \beta$ und der Winkel an der Spitze $= \gamma$ gegeben ist. (Fig. 53.)

Analysis. Ich denke mir die Aufgabe bereits gelöst und nehme an, daß in dem Dreieck ABC die Seite AC $= \beta$, der Winkel ACB $= \gamma$ und die Höhe CD $= \alpha$ ist. In dem Dreiecke ABC selbst kenne ich nur zwei Stücke, Seite AC und Winkel ACB; aus zwei Stücken allein aber läßt sich kein Dreieck zeichnen. In dem rechtwinkligen Dreiecke ACD dagegen kenne ich außer dem rechten Winkel ADC noch die Seiten CD und AC; ich bin daher im Stande, dieses Dreieck nach § 91 zu zeichnen. Habe ich aber Dreieck ACD erhalten, so fehlt mir allein noch der Punkt B, welchen ich leicht mit Hülfe des gegebenen Winkels ACB finde.

---

*) Die vollständige Bearbeitung der beiden ersten Aufgaben kann zum Muster für die Behandlung der übrigen dienen.

Aufl. Man zeichne einen rechten Winkel CDA (Fig. 53), schneide von dem einen Schenkel α = CD ab, beschreibe um C mit β einen Kreis, welcher den andern Schenkel des rechten Winkels in A schneidet, ziehe AC und trage in C Winkel γ so an, daß ein Schenkel auf die Linie AC fällt. Schneidet nun der andere Schenkel die verlängerte AD in B, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Der Beweis ist in der Construction enthalten.

Bedingungen. 1. Die Höhe α darf offenbar nicht größer sein, als die gegebene Seite β. — Ist $\alpha = \beta$, so wird das gesuchte Dreieck rechtwinkelig.

2. Wenn der Winkel $\gamma <$ CAD ist, so läßt sich derselbe auch in C an der andern Seite von AC antragen, und das entstandene Dreieck CAE enthält ebenfalls die verlangten Stücke: Winkel ACE $= \gamma$, Seite AC $= \beta$, Höhe CD $= \alpha$; die Aufgabe hat also zwei verschiedene Auflösungen. Wenn dagegen Winkel $\gamma >$ oder $=$ CAD ist, so hat die Aufgabe nur eine Auflösung. Sollte aber Winkel γ eben so groß oder größer, als der Winkel CAE sein, so wäre die Aufgabe gar nicht zu lösen.

Anm. Auch hier tritt wieder der in § 73 besprochene Fall ein, daß in den Dreiecken ACB und ACE, welche beide die drei gegebenen Stücke enthalten, sich zwei Winkel CAB und CAE zu einem flachen ergänzen, wie dieß überhaupt bei Dreiecksaufgaben der Fall zu sein pflegt, welche eine zweifache Auflösung zulassen.

Aufgabe 2. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem die Grundlinie $= \alpha$, ein Winkel an derselben $= \beta$ und die Summe der beiden andern Seiten $= \gamma$ gegeben ist.

Analysis. Wenn ABC (Fig. 32) das gesuchte Dreieck und AB $= \alpha$, Winkel A $= \beta$ und AC + BC $= \gamma$ ist, so kenne ich unmittelbar in demselben nur zwei Stücke, Seite AB und Winkel A. Hieraus aber kann ich dasselbe nicht zeichnen. Um das dritte gegebene Stück AC + BC für die Auflösung benutzen zu können, habe ich dasselbe vor allen Dingen zu construiren. Ich verlängere daher AC über C um BC bis D, und indem ich noch D mit B verbinde, erhalte ich ein Dreieck ABD, in welchem ich drei Stücke kenne, nehmlich Seite AD $= \gamma$, AB $= \alpha$ und Winkel DAB $= \beta$. Habe ich hieraus Dreieck ABD gezeichnet, so fehlt mir allein noch der Punkt C, welcher sich mir daraus ergiebt, daß Seite CD = CB, also auch Winkel CBD = CDB ist.

Aufl. Man zeichne einen Winkel A $= \beta$, schneide von dem einen Schenkel α = AB und vom andern γ = AD ab, ziehe BD und lege in B den entstandenen Winkel ADB so an, daß ein Schenkel auf BD fällt. Schneidet nun der andere Schenkel AD in C, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Der Winkel A ist $= \beta$ und Seite AB $= \alpha$ construirt. Drittens ist auch AC + CB $= \gamma$. Denn da Winkel CBD = CDB gemacht ist, so ist auch CB = CD, folglich AC + CB = AC + CD = AD, welches $= \gamma$ gemacht ist.

Bedingung γ muß $> \alpha$ sein; (entgegengesetzten Falles ließe sich Winkel D nicht von ABD abschneiden).

Aufgabe 3 — 7. Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

3) beide Catheten;

4) die Hypotenuse und eine Cathete;

5) die Hypotenuse und ein anliegender spitzer Winkel;

6) eine Cathete und der anliegende spitze Winkel;

7) eine Cathete und der gegenüberliegende spitze Winkel.

Aufgabe 8 — 13. Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

8) die Höhe und Grundlinie;

9) die Höhe und eine Seite;

10) die Höhe und der Winkel an der Spitze;

11) die Höhe und ein Winkel an der Grundlinie;

12) die Grundlinie und das aus einem Endpunkte derselben auf eine Seite (oder ihre Verlängerung) gefällte Loth;

13) eine Seite und das auf diese Seite (oder ihre Verlängerung aus der gegenüberliegenden Ecke gefällte Loth (zwei Auflösungen*).

Aufgabe 14 — 18. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

14) die Höhe, die Grundlinie und eine Seite (zwei Auflösungen);

15) die Höhe, die Grundlinie und ein Winkel an derselben;

16) die Höhe und beide Seiten (zwei Auflösungen);

17) die Höhe, eine Seite und der dieser Seite gegenüberliegende Winkel (zwei Auflösungen);

18) die Höhe und die beiden Winkel an der Grundlinie.

Aufgabe 19 — 30. Wenn wir die Abschnitte, in welche die Grundlinie durch die Höhe getheilt wird, welche wir kurzweg die Segmente nennen wollen, unter die gegebenen Stücke aufnehmen, so lassen sich weiter folgende Aufgaben aufstellen, bei denen wir uns jedoch um größerer Einfachheit willen auf den Hauptfall beschränken, daß die Höhe innerhalb des Dreiecks fällt: — Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

19) die beiden Segmente und die Höhe;

20) die beiden Segmente und eine Seite;

21) die beiden Segmente und ein Winkel an der Grundlinie**);

22) der Unterschied der Segmente und die beiden Seiten;

23) der Unterschied der Segmente, die Höhe und eine Seite;

24) der Unterschied der Segmente, die Höhe und ein Winkel an der Grundlinie;

---

*) d. h. es lassen sich aus den gegebenen Stücken zwei verschiedene gleichschenklige Dreiecke zeichnen.

**) Man erhält eine weitere Reihe eben so leicht zu lösender Aufgaben, wenn man nur ein Segment und noch zwei andere Stücke des Dreiecks als gegeben annimmt.

25) der Unterschied der Segmente, eine Seite und der ihr anliegende Winkel an der Grundlinie;

26) der Unterschied der Segmente, eine Seite und der ihr gegenüberliegende Winkel;

27) der Unterschied der Segmente und die beiden Winkel an der Grundlinie;

28) der Unterschied der Winkel an der Grundlinie und beide Seiten;

29) der Unterschied der Winkel an der Grundlinie, der Unterschied der Segmente und eine Seite;

30) der Unterschied der Winkel an der Grundlinie, die Höhe und eine Seite.

Aufgabe 31 — 37. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

31) die Grundlinie, ein Winkel an derselben und der Unterschied der beiden Seiten;

32) die Grundlinie, der Winkel an der Spitze und die Summe der beiden Seiten;

33) die Grundlinie, der Winkel an der Spitze und der Unterschied der beiden Seiten;

34) die beiden Winkel an der Grundlinie und die Summe der beiden Seiten;

35) die beiden Winkel an der Grundlinie und der Unterschied der beiden Seiten;

36) zwei Winkel und die Summe aller drei Seiten;

37) zwei Winkel und der Unterschied, um welchen die Summe zweier Seiten die dritte übertrifft.*)

B. Vermischte Aufgaben.

Aufgabe 38 — 41. In dem einen Schenkel eines Winkels, dessen Scheitel A heißen soll, ist ein Punkt P gegeben, es soll in dem andern Schenkel ein Punkt X so gefunden werden, daß, wenn man P mit X verbindet:

38) PX = AX wird;

39) PX + AX einer gegebenen Linie gleich wird;

40) PX die Linie AX um die Länge einer gegebenen Linie übertrifft;

41) PX von AX um eine gegebene Länge übertroffen wird.

Aufgabe 42 — 43. Es ist eine unbegrenzte Linie AB und an derselben Seite dieser Linie sind zwei Punkte P und Q gegeben; es soll in der Linie AB ein Punkt X so gefunden werden, daß wenn man X mit P und Q verbindet, die Verbindungslinien

*) Noch andere Dreiecksaufgaben entstehen, wenn man die Linie, welche den Winkel an der Spitze halbirt, oder die Linie, welche die Spitze mit der Mitte der Grundlinie verbindet, unter die gegebenen Stücke aufnimmt.

42) einander gleich werden;

43) mit AB gleiche Winkel bilden.

Aufgabe 44—45. Dieselben Aufgaben wie vorher, wenn die beiden Punkte P und Q an entgegengesetzten Seiten von AB liegen.

Aufgabe 46—48. In einem gegebenen Dreiecke ABC soll parallel mit der Grundlinie AB eine die Seiten AC und BC in den Punkten X und Y durchschneidende Linie so gezogen werden, daß

46) XY = AX wird;

47) XY = AX + BY wird;

48) XY = AX — BY wird.

Aufgabe 49—50. Die Aufgaben 46 und 47 mit der Abänderung, daß XY nicht die Seiten selbst, sondern ihre über A und B fortgesetzten Verlängerungen durchschneiden soll.

Aufgabe 51. Warum kann in diesem Falle niemals XY = AX — BY werden?

Aufgabe 52. Einen rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.*)

Sechster Abschnitt.

Von den Vierecken.

A. Vom Vierecke im Allgemeinen.

Bemerkung. Jedes Viereck läßt sich durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerschneiden und somit die Betrachtung des Vierecks sich auf die des Dreiecks zurückführen. Wir werden uns daher beim Viereck auf eine weit geringere Zahl von Sätzen beschränken und nur einige besonders wichtige hervorheben.

Wenn ein Viereck einen erhabenen Winkel hat (Fig. 54. b), so fällt nur die eine Diagonale innerhalb, die andere außerhalb des Vierecks; jedesmal aber fällt eine Diagonale innerhalb, und es ist daher immer möglich, das Viereck durch eine innerhalb fallende Diagonale in zwei Dreiecke zu zerschneiden.

§ 96. Lehrsatz.

Die Summe der Winkel eines jeden Vierecks ist gleich zwei Flachen.

---

*) Für die Aufgabe, einen beliebigen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen, kennt man keine rein geometrische Auflösung.

Beweis. Man zerschneide das Viereck ABCD (Fig. 54. a u. b) durch eine Diagonale AC in zwei Dreiecke ABC und ACD. Nach § 56 betragen die Winkel eines jeden Dreiecks einen Flachen; also ist im Dreiecke ABC

$$m + q + o = \pi$$

und im Dreiecke ACD

$$n + p + r = \pi,$$

folglich wenn ich addire:

$$m + q + o + n + p + r = 2\pi.$$

Statt m + n kann ich A, statt q B, statt o + p C und statt r D setzen; dann erhalte ich

$$A + B + C + D = 2\pi.$$

Bemerkung. An jedem Vierecke unterscheidet man unmittelbar 8 Stücke, nehmlich 4 Seiten und 4 Winkel. Versucht man es, mit Hilfe derselben das Viereck abzuzeichnen, so findet man leicht, daß hierzu drei Seiten und die beiden zwischenliegenden Winkel oder drei Winkel und die beiden zwischenliegenden Seiten ausreichen. Auf diese Art erhält man die beiden folgenden Congruenzsätze, welche den beiden ersten Congruenzfällen der Dreiecke (§ 66 u. 67) entsprechen.

§ 97. Lehrsatz.

1) Zwei Vierecke sind congruent, wenn sie in drei Seiten und den zwischenliegenden Winkeln übereinstimmen.

2) Zwei Vierecke sind congruent, wenn sie in drei Winkeln und den zwischenliegenden Seiten übereinstimmen.

Die Beweise sind dieselben wie von § 66 und 67.

Bemerkung. Im Allgemeinen kann man annehmen, daß ein Viereck durch 5 Stücke (Seiten oder Winkel) bestimmt wird, wobei jedoch alle 4 Winkel, vermöge § 96, nur für 3 Stücke zählen. Hierbei können indeß dergleichen zwei- oder mehrdeutige Fälle vorkommen, wie wir zuerst beim Dreiecke in § 73 kennen gelernt haben. Wir übergehen aber diese Sätze aus den oben angegebenen Gründen und wenden uns sogleich zur Betrachtung des wichtigsten Vierecks.

B. Vom Parallelogramme.

§ 98. Erklärung.

Ein Viereck, in welchem die gegenüberstehenden Seiten parallel laufen, heißt ein Parallelogramm.

§ 99. Lehrsatz.

In jedem Parallelogramme sind die gegenüberstehenden Winkel gleich.

Beweis. Wenn ABCD (Fig. 55) ein Parallelogramm ist, so ist AB ∥ CD und AD ∥ BC. Bei parallelen Linien betragen die Ergänzungswinkel einen Flachen. Also ist

A + B = π, weil AD ∥ BC ist,
und A + D = π, weil AB ∥ CD ist,
folglich B = D.
Eben so wird A = C erwiesen.

Anm. Auch der umgekehrte Satz ist richtig (und leicht zu erweisen): ein Viereck, in welchem die gegenüberstehenden Winkel gleich sind, ist ein Parallelogramm.

§ 100. Zusatz.

Ist in einem Parallelogramme ein Winkel ein rechter, so sind sie alle rechte.

Beweis. Wenn in dem Parallelogramme ABCD (Fig. 56) Winkel A als ein rechter vorausgesetzt ist, so muß auch C ein rechter sein, weil zu Folge des vorherg. § in jedem Parallelogramme die gegenüberstehenden Winkel gleich sind. Da nun A und C als Rechte zusammen einen Flachen ausmachen und alle Winkel eines Vierecks nach § 96 zwei Flache betragen, so bleibt für B und D noch ein Flacher übrig. Da sie aber als gegenüberstehende Winkel im Parallelogramme gleich sind, so kommt folglich auf jeden ein Rechter.

§ 101. Lehrsatz.

In jedem Parallelogramme sind die gegenüberstehenden Seiten gleich.

Beweis. Man zerschneide das Parallelogramm ABCD (Fig. 57) durch eine Diagonale AC in zwei Dreiecke ABC und ADC, welche congruent sind, weil sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen, nehmlich

AC = AC
W. m = p, weil AB ∥ CD ist
und W. o = n, weil AD ∥ BC ist,
folglich △ ABC ≅ CDA nach §. 67,
also auch AB = CD
und BC = AD.

§ 102. Zusatz.

Die Diagonale theilt das Parallelogramm in zwei congruente Dreiecke.

Der Beweis ist im vorherg. § enthalten.

Anm. Durch Umkehrung des vorletzten Satzes geht der folgende hervor.

§ 103. Lehrsatz.

Sind in einem Vierecke die gegenüberstehenden Seiten gleich, so sind sie auch parallel, und das Viereck ist folglich ein Parallelogramm.

Beweis. Wenn also AB = CD und AD = BC (Fig. 57) gegeben ist, so soll AB ∥ CD und AD ∥ BC erwiesen werden. — Um dieses zu zeigen, ziehe ich wieder eine Diagonale von A nach C. — Die hierdurch entstandenen Dreiecke ABC und ACD sind congruent, weil sie in den drei Seiten übereinstimmen, nehmlich

$$\begin{array}{l} AC = AC \\ \left.\begin{array}{l} AB = CD \\ BC = AD \end{array}\right\} \text{vorausgesetzt,} \end{array}$$

folglich △ ABC ≅ CDA nach § 71,
daher auch W. m = p
und n = o.

Da nun Winkel m = p erwiesen ist, so muß auch AB ∥ CD sein, und da Winkel n = o ist, so muß AD ∥ BC sein; denn wenn die Wechselwinkel gleich sind, so sind die Linien (nach § 44) parallel.

Anm. Wir haben den letzten Satz erhalten, indem wir die beiden Folgerungen des § **101**, AB = CD und AD = BC, als Voraussetzungen annahmen. Behalten wir von den beiden Voraussetzungen des § **101** (AB ∥ CD und AD ∥ BC) die eine AB ∥ CD bei und nehmen statt der andern die Folgerung AB = CD mit in die Voraussetzung, so geht ein neuer ebenfalls richtiger Satz hervor.

§ 104. Lehrsatz.

Sind in einem Vierecke ein Paar gegenüberstehende Seiten parallel und gleich, so sind auch die andern beiden Seiten parallel und gleich, und das Viereck ist folglich ein Parallelogramm.

Beweis. Es sei also in dem Viereck ABCD (Fig. 57) AB ∥ CD und AB = CD gegeben, so ist zu zeigen, daß auch AD ∥ BC und AD = BC ist. — Ich ziehe wieder die Diagonale AC; — die entstandenen Dreiecke ABC und ADC sind congruent, weil sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen,

nehmlich $AC = AC$
$AB = CD$ vorausgesetzt,
Winkel $m = p$, weil $AB \parallel CD$ vorausgesetzt ist,

folglich $\triangle ABC \cong CDA$ nach § 66,
daher auch $BC = AD$
und Winkel $o = n$.
Da nun Winkel $n = o$ erwiesen ist, so muß auch nach § 44 $AD \parallel BC$ sein.

Anm. Wollte man die beiden Voraussetzungen $AB \parallel CD$ und $AD = BC$ (Fig. 57) mit einander verbinden, so würden zwar die beiden Dreiecke ABC und ACD in zwei Seiten ($AC = AC$ und $AD = BC$) und einem Winkel an der dritten (Winkel $m = p$), übereinstimmen, sie würden aber dann zu Folge § 73 nicht nothwendig congruent sein. Es könnten nehmlich auch die beiden andern Winkel an der dritten Seite, Winkel B und D (Figur 58), sich zu einem Flachen ergänzen. Wenn also in einem Vierecke ein Paar gegenüberstehende Seiten parallel und das andere Paar gleich gegeben sind, so läßt sich nicht unbedingt behaupten, daß das Viereck ein Parallelogramm ist.

§ 105. Zusatz.

1) Parallele Linien zwischen parallelen Linien sind gleich.

2) Lothe zwischen parallelen Linien sind gleich. — Man sagt daher: parallele Linien stehen überall gleich weit von einander ab.

3) Wenn mehrere Punkte von einer geraden Linie gleichen Abstand haben, so liegen diese Punkte in einer zu der gegebenen Linie parallelen geraden Linie.

Beweis. 1) Wenn zwischen den beiden parallelen Linien AB und CD (Fig. 59) irgend zwei parallele Linien EF und GH gezogen werden, so ist das entstandene Viereck EFHG ein Parallelogramm und folglich $EF = GH$, weil nach § 101 in jedem Parallelogramme die gegenüberstehenden Seiten gleich sind.

2) Da die Lothe CF und DG, welche zwischen den Parallelen AB und CE (Fig. 60) gezogen sind, nach § 47 einander parallel sind, so müssen sie nach Nr. 1 auch gleich sein.

3) Wenn die Punkte C, D und E (Fig. 60) von der geraden Linie AB gleichen Abstand haben, d. h. wenn die Lothe CF, DG und EH einander gleich sind, so liegen die Punkte C, D und E in einer zu AB parallelen geraden Linie. — Um dieses zu zeigen, ziehe ich durch einen der gegebenen Punkte, z. B. C eine Parallele zu AB und nehme an, diese ginge nicht durch die Punkte D und E,

sondern schnitte die Lothe DG und EH (oder ihre Verlängerungen) in andern Punkten K und L, so müßten nach Nr. 2 KG und LH = CF sein, welches doch nicht möglich ist, da DG und EH = CF vorausgesetzt sind. Demnach kann die durch C mit AB gezogene Parallele die Lothe DG und EH nur in den Punkten D und E durchschneiden und folglich liegen die Punkte C, D und E in einer mit AB parallelen geraden Linie.

§ 106. Lehrsatz.

Die Diagonalen eines Parallelogramms halbiren sich gegenseitig.

Dieser Punkt, in welchem sich die Diagonalen durchschneiden, heißt der Mittelpunkt des Parallelogramms.

Beweis. Das gegebene Parallelogramm sei ABCD (Fig. 61). Die beiden Dreiecke ABE und CDE sind congruent, weil sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen, nehmlich AB = CD, als gegenüberst. Seiten im Prlgrm.

Winkel o = m }
und Winkel p = n } weil AB || CD ist.

folglich △ ABE ≅ CDE nach 67,
und daher auch AE = CE
BE = DE, w. z. b. w.

Anm. 1. Auch der umgekehrte Satz ist richtig: Ein Viereck, dessen Diagonalen sich halbiren, ist ein Parallelogramm.

Anm. 2. Der Mittelpunkt des Parallelogramms hat die Eigenschaft, daß jede durch denselben gezogene Linie das Parallelogramm in zwei congruente Hälften zerschneidet.

§ 107. Erklärung.

Ein Parallelogramm, in welchem alle Winkel rechte sind, heißt ein Rechteck, und ein Parallelogramm, in welchem alle Seiten gleich sind, wird Raute oder Rhombus genannt. Sind in einem Viereck alle Seiten gleich und alle Winkel rechte, so heißt dasselbe ein Quadrat.

Anm. 1. Manche Schriftsteller fügen beim Rechteck noch die Bedingung hinzu, daß die zusammenstoßenden Seiten ungleich, und beim Rhombus, daß die Winkel schiefe sein müssen, was indeß weniger zweckmäßig ist. Nach der hier aufgestellten Erklärung ist der engere Begriff des Quadrats sowohl in dem weitern des Rechtecks, als in dem des Rhombus enthalten, so daß alle Sätze über das Rechteck oder Rhombus auch vom Quadrate gelten müssen. Nach der entgegengesetzten Behand-

lungsweise müßte jeder vom Rechteck oder Rhombus dargethane Satz noch besonders wieder vom Quadrate erwiesen werden.

In älterer Zeit gab man auch wohl einem Parallelogramme, in welchem die Winkel schief und die zusammenstoßenden Seiten ungleich sind, den Namen Rhomboides.

Anm. 2. Folgende Sätze sind leicht zu erweisen:

1) Im Rechtecke sind die Diagonalen einander gleich;

2) im Rhombus stehen sie auf einander senkrecht, und folglich müssen

3) im Quadrate die Diagonalen sowohl gleich sein, als auf einander senkrecht stehen.

4) Alle drei Behauptungen gelten auch umgekehrt.

C. Vom Trapeze.

§ 108. Erklärung.

Ein Viereck, in welchem zwei Seiten parallel laufen, heißt ein Trapez.

Anm. Viele Schriftsteller nennen dieses ein Paralleltrapez. Beim Trapez bleibt es unentschieden, ob die beiden andern Seiten auch parallel sind oder nicht. Das Parallelogramm ist daher ein besonderer Fall des Trapezes, und alle Sätze vom Trapeze müssen folglich auch vom Parallelogramme gelten.

Wenn wir im Folgenden an einigen Stellen von den beiden nicht parallelen Seiten eines Trapezes sprechen, so ist dieß ein abgekürzter Ausdruck und soll eigentlich heißen: „die beiden Seiten, welche nicht ausdrücklich als parallel gegeben sind und daher eben so wohl nicht parallel, als parallel sein können."

§ 109. Lehrsatz.

1) Wenn man in einem Trapeze ABCD (Fig. 62) eine der nicht parallelen Seiten AD halbirt und durch den Halbirungspunkt E eine Parallele EF zu den parallelen Seiten zieht, so halbirt dieselbe auch die andere nicht parallele Seite BC.

2) Eine Linie, welche die Mitten E und F der nicht parallelen Seiten eines Trapezes verbindet, ist den parallelen Seiten AB und CD parallel, und

3) Diese Verbindungslinie EF ist der halben Summe der beiden parallelen Seiten AB und CD gleich und wird die mittlere Länge des Trapezes genannt.

Beweis. 1) Um zu zeigen, daß BC im Punkte F halbirt ist, ziehe ich durch diesen Punkt mit AD eine Parallele, welche AB in H und die verlängerte CD in G schneidet. Nun sind die

entstandenen Dreiecke BFH und CFG congruent, weil sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen. Es ist nehmlich FH = AE, als Parallelen zwischen Parallelen, AE = DE vorausgesetzt und DE = FG, wieder als Parallelen zwischen Parallelen; folglich ist auch

FH = FG.

Ferner ist W. HFB = CFG, als Scheitelwinkel

und W. FHB = FGC, weil AB ∥ DG ist,

folglich △ BFH ≅ CFG nach § 68,

also auch BF = CF.

Demnach ist BC in F halbirt.

2) Wenn E und F die Mitten von AD und BC sind, so muß EF parallel mit AB (u. CD) sein. Denn gesetzt, dieses wäre nicht der Fall, so ließe sich durch den Punkt E eine andere Linie EK ∥ AB ziehen. Dann wäre nach Nr. 1 BC in K halbirt, welches doch nicht möglich ist, da der Punkt F als die Mitte von BC gegeben ist. Demnach ist nicht EK, sondern EF mit AB (u. CD) parallel.

3) Aus der in Nr. 1 erwiesenen Congruenz der Dreiecke BFH und CFG folgt auch noch BH = CG. Da nun AH = EF = DG ist, als gegenüberstehende Seiten in Parallelogrammen, so übertrifft AB die Linie EF um eben so viel, als CD kleiner, als EF ist; demnach ist 2EF = AB + CD

und $$EF = \frac{AB + CD}{2}$$

Anm. Die so eben erwiesenen Sätze gelten sämmtlich auch dann noch, wenn das Trapez in ein Parallelogramm übergeht.

*§ 110. Zusatz.

Das Stück BH, welches die durch die Mitte F der Seite BC mit AD parallel gezogene Linie FH von der größeren Parallelen AB abschneidet, ist dem halben Unterschiede der beiden parallelen Seiten AB und CD gleich. (Fig. 62.)

Beweis. Nach dem vorherg. § übertrifft AB die Linie EF um BH und EF die Linie CD um das eben so große Stück CG. Demnach übertrifft AB die Seite CD um das Doppelte von BH, also ist 2BH = AB − CD

und $$BH = \frac{AB - CD}{2}$$

Bemerkung. Wenn wir in einem Trapeze die kürzere Parallele verschwinden lassen, so verwandelt sich das Trapez in ein Dreieck und der vorherg. Lehrsatz (§ 109) in den folgenden:

§ 111. Lehrsatz.

1) Wenn man in einem Dreiecke ABC (Fig. 63) eine Seite AC halbirt und durch den Halbirungspunkt D mit der Grundlinie AB eine Parallele DE zieht, so halbirt diese auch die andere Seite BC.

2) Eine Linie, welche die Mitten D und E zweier Seiten eines Dreiecks verbindet, ist der dritten Seite AB parallel.

3) Diese Verbindungslinie DE ist der Hälfte der dritten Seite AB gleich.

Beweis. 1) Um zu zeigen, daß BC in E halbirt ist, ziehe ich durch den Punkt E eine Parallele EF mit AC. Dann sind die entstandenen Dreiecke BEF und ECD congruent, weil sie in einer Seite, einem anliegenden und einem gegenüberstehenden Winkel übereinstimmen; es ist nehmlich Seite EF = AD als gegenüberstehende Seiten im Parallelogramme ADEF, und da AD = CD gemacht ist, so ist folglich auch

EF = CD.

Ferner ist W. FBE = DEC, weil BF ∥ ED vorausgesetzt ist,
und W. FEB = DCE, weil EF ∥ CD gemacht ist,
folglich △ BEF ≅ ECD nach § 68
und daher Seite BE = CE,
also BC in E halbirt.

2) Wenn die Punkte D und E die Mitten der Seiten AC und BC sind, so muß DE parallel AB sein, welches eben so indirect aus Nr. 1 gefolgert wird, wie dieß in § 109 geschehen ist.

3) Aus der in Nr. 1 erwiesenen Congruenz der Dreiecke BEF und ECD folgt auch BF = DE, und da auch AF = DE ist, als gegenüberstehende Seiten im Prlgrm. ADEF, so ist AB doppelt so groß, als DE.

Anm. Es sind daher in dem Dreiecke CDE alle Seiten halb so groß, als in dem Dreiecke ABC.

Bemerkung. Aus der Verknüpfung der beiden letzten Lehrsätze (§ 109 u. 111) geht der folgende Satz hervor.

§ 112. Zusatz.

Wenn mehrere parallele Linien, AB, CD, EF, GH und KL

(Fig. 64) von einer schneidenden Linie AK gleiche Stücke (AC = CE = EG = GK) abschneiden, so theilen sie auch jede andere schneidende Linie AP oder BL in gleiche Theile.

Beweis. Da in dem Dreiecke AEN nach der Voraussetzung AC = CE, also Seite AE in C halbirt und die Linie CM mit der dritten Seite EN parallel ist, so ist nach § 111 auch die Seite AN in M halbirt und folglich AM = MN. — Eben so ist im Trapeze CGOM die Seite CG in E halbirt und EN mit den parallelen Seiten CM und GO parallel, folglich nach § 109 MN = NO.

Auf gleiche Weise kann NO = OP, ferner BD = DF = FH = HL erwiesen werden.

D. Aufgaben.

§ 113. Aufgabe.

Ein Parallelogramm zu zeichnen, von welchem zwei Seiten α und β (Fig. 55) und ein Winkel γ gegeben sind.

Aufl. Man zeichne einen Winkel $A = \gamma$, schneide von dem einen Schenkel $AB = \alpha$ und von dem andern $AD = \beta$ ab, ziehe durch die Endpunkte B und D Parallelen mit AD und AB, welche sich in C schneiden, so ist das entstandene Viereck ABCD ein Parallelogramm nach § 98.

Anm. Man könnte auch, statt durch B und D Parallelen mit AD und AB zu ziehen, um B und D mit β und α Kreise beschreiben und den erhaltenen Durchschnittspunkt C mit B und D verbinden; das so erhaltene Viereck ABCD ist nach § 103 ebenfalls das richtige Parallelogramm. — Diese letzte Auflösung ist in praktischer Hinsicht meist vorzuziehen.

§ 114. Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie AB (Fig. 65) in eine vorgeschriebene Anzahl, z. B. in 5 gleiche Theile zu theilen.

Die Analysis ist in §. 112 enthalten.

Aufl. Man ziehe durch den einen Endpunkt A unter einem beliebigen Winkel eine Linie AZ, trage auf diese von A aus 5 beliebige, aber gleiche Stücke AC = CD = DE = EF = FG auf, verbinde G mit B und ziehe durch die Punkte C, D, E, F Parallelen mit BG, welche AB in H, K, L, M schneiden, so ist nach § 112 AB in diesen Punkten in 5 gleiche Theile getheilt.

§ 115. Aufgabe.

Zwischen den Schenkeln eines Winkels BAC (Fig. 66) eine

Linie von vorgeschriebener Länge (α) so zu ziehen, daß ihre Endpunkte auf die Schenkel des Winkels BAC fallen und sie mit dem einen Schenkel AC einen gegebenen Winkel (β) bildet.

Aufl. Man wähle in AC einen beliebigen Punkt D, lege in diesem den gegebenen Winkel β an, so daß ein Schenkel auf AD fällt, und schneide vom andern Schenkel DE $= \alpha$ ab, ziehe durch E mit AC eine Parallele, welche AB in F schneidet, und durch F mit DE eine Parallele FG, so ist dieses die verlangte Linie.

Beweis. Denn erstens fallen beide Endpunkte F und G auf die Schenkel des gegebenen Winkels BAC; zweitens ist FG = DE als gegenüberstehende Seiten im Prlgrm. DEFG, und DE $= \alpha$ gemacht, also auch FG $= \alpha$; drittens ist Winkel FGA = EDG, weil FG $\parallel$ DE ist, und da EDG $= \beta$ gemacht ist, folglich auch FGA $= \beta$.

Anm. Wenn statt zweier sich schneidenden Linien AB und AC zwei parallele Linien gegeben wären, so würde die Aufgabe (im Allgemeinen) unmöglich sein.

Uebungsaufgaben.

A. Viereckaufgaben.

Aufgabe 53 — 54. Ein Quadrat zu zeichnen, von welchem gegeben ist:

53) eine Seite;

54) eine Diagonale.

Aufgabe 55 — 56. Ein Rechteck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

55) zwei Seiten;

56) eine Seite und eine Diagonale.

Aufgabe 57 — 59. Einen Rhombus zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

57) eine Seite und ein Winkel;

58) eine Seite und eine Diagonale;

59) eine Diagonale und ein Winkel.

Aufgabe 60 — 62. Ein Parallelogramm zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

60) zwei Seiten und eine Diagonale;

61) beide Diagonalen und eine Seite;

62) eine Seite, ein Winkel und eine Diagonale (zwei Auflösungen).

Aufgabe 63 — 81. Ein Trapez (Figur 58) zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

63) die beiden parallelen Seiten (a und c) und die Winkel an einer derselben (A und B);

64) eine der beiden parallelen Seiten (a), die ihr anliegenden Winkel (A und B) und eine der nicht parallelen Seiten (b);

65) die beiden parallelen Seiten (a u. c), eine der nicht parallelen Seiten (b) und ein dieser anliegender Winkel (B);

66) die beiden parallelen Seiten (a und c), eine der beiden nicht parallelen Seiten (b) und ein dieser nicht anliegender Winkel (A) (zwei Auflösungen*);

67) die beiden nicht parallelen Seiten (b und d), eine der parallelen Seiten (a) und ein Winkel (A) (zwei Auflösungen);

68) alle vier Seiten (a, b, c und d);

69) die Summe der beiden parallelen Seiten (a + c); zwei Winkel an einer parallelen Seite (A u. B) und eine der nicht parallelen Seiten (d);

70) die Summe der beiden parallelen Seiten (a + c); ein Winkel (A) und die beiden nicht parallelen Seiten (b u. d) (zwei Auflösungen);

71) eine Diagonale (e), die beiden parallelen Seiten (a und c) und eine der nicht parallelen Seiten (b);

72) eine Diagonale (e), die beiden nicht parallelen Seiten (b u. d) und eine der parallelen Seiten (a) (zwei Auflösungen);

73) eine Diagonale (e), zwei Winkel an einer parallelen Seite (A u. B) und eine der nicht parallelen Seiten (b) (zwei Auflösungen);

74) eine Diagonale (e), eine der parallelen Seiten (a) und die anliegenden Winkel (A und B) (zwei Auflösungen);

75) eine Diagonale (e), zwei Winkel an einer parallelen Seite (A und B) und der Unterschied der beiden parallelen Seiten (a — c) (zwei Auflösungen),

76) eine Diagonale (e), die beiden nicht parallelen Seiten (b u. d) und der Unterschied der beiden parallelen Seiten (a — c) (zwei Aufl.);

77) zwei zusammenstoßende Seiten (a und b), der eingeschlossene Winkel (B) und der Winkel, welchen die Diagonalen einschließen;

78) die beiden Diagonalen (e und f) und die beiden parallelen Seiten (a und c);

79) die beiden Diagonalen (e und f), der Winkel, welchen sie einschließen, und eine der parallelen Seiten (a);

80) die beiden Diagonalen (e und f), der Winkel, welchen sie einschließen, und eine der nicht parallelen Seiten (b) (zwei Auflösungen);

81) die beiden Diagonalen (e und f), der Winkel, welchen sie einschließen, und ein Winkel des Trapezes (A).

Aufgabe 82 — 98 (Figur 67). Ein Viereck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

82) alle Seiten (a, b, c, d) und ein Winkel (A) (zwei Aufl.);

83) drei Seiten (a, b, d) und die eingeschlossenen Winkel (A u. B);

84) drei Seiten (a, b, d) und zwei einander gegenüberliegende Winkel (A und C) (zwei Auflösungen **);

---

*) Das heißt, daß unter gewissen Bedingungen zwei verschiedene Trapeze existiren können, welche beide die gegebenen Stücke enthalten.

**) Diese Aufgabe wird leichter mit Anwendung der Sätze vom Kreise gelöst.

85) drei Seiten (a, b, d) und die beiden Winkel (A und D), welche an einer der nicht eingeschlossenen Seiten liegen (zwei Aufl.);

86) zwei zusammenstoßende Seiten (a und b) und drei Winkel (A, B und C);

87) zwei gegenüberliegende Seiten (a und c) und drei Winkel (A, B und C);

*87) alle vier Seiten und die Summe zweier an einer Seite liegenden Winkel;

88) eine Diagonale (e) und alle vier Seiten (a, b, c und d) (zwei Auflösungen);

89) eine Diagonale (e), drei Seiten (a, b und d) und ein von der Diagonale getheilter Winkel (A);

90) drei Seiten (a, b und c), ein nicht eingeschlossener Winkel (D) und die gegenüberliegende Diagonale (e) (zwei Auflösungen);

91) zwei zusammenstoßende Seiten (a und b), die verbindende Diagonale (e) und zwei Winkel (A und D), welche an einer nicht gegebenen Seite liegen;

92) eine Diagonale (e), zwei mit derselben in eine Ecke zusammenstoßende Seiten (a und d) und zwei Winkel (B und C), welche an einer nicht gegebenen Seite liegen (vier Auflösungen);

93) eine Diagonale (e), zwei sich gegenüberliegende Seiten (a u. c) und die der einen dieser Seiten anliegenden Winkel (A und B) (vier Auflösungen);

94) die beiden Diagonalen (e und f) und drei Seiten (a, b, c) (zwei Auflösungen);

95) die beiden Diagonalen (e und f), zwei zusammenstoßende Seiten (a und b) und der einer anliegende Winkel (A) (zwei Aufl.);

96) die beiden Diagonalen (e und f), eine Seite (a) und die anliegenden Winkel (A und B) (vier Auflösungen);

97) die beiden Diagonalen (e und f), der von denselben eingeschlossene Winkel und zwei zusammenstoßende Seiten (a und b);

98) die beiden Diagonalen (e und f), der eingeschlossene Winkel und zwei gegenüberliegende Seiten (a und c) (zwei Auflösungen *).

Anm. Diese Aufgaben lassen sich noch um ein Bedeutendes vermehren, wenn man die Winkel, welche die Diagonalen mit den Seiten des Vierecks bilden, unter die gegebenen Stücke aufnimmt.

B. Dreiecksaufgaben.

Aufgabe 99—105. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

99) der Winkel an der Spitze und die aus den Endpunkten der Grundlinie auf die Seite gefällten Lothe;

100 und 101) die aus den Endpunkten der Grundlinie auf die

*) Vergl. die Aufgaben 169—171.

Seiten gefällten Lothe und die Summe oder der Unterschied der beiden Seiten (zwei Auflösungen);

102 und **103**) die beiden Seiten und die Summe oder der Unterschied der auf die Seiten aus den Endpunkten der Grundlinie gefällten Lothe (zwei Auflösungen);

104 und **105**) die beiden Winkel an der Grundlinie und die Summe oder der Unterschied der aus den Endpunkten der Grundlinie auf die Seiten gefällten Lothe.

Aufgabe **106 — 109.** Wenn man die Linie, welche die Spitze eines Dreiecks mit der Mitte der Grundlinie verbindet, und die der Kürze wegen den Namen Mittellinie erhalten soll, unter die gegebenen Stücke aufnimmt, so lassen sich weiter folgende Aufgaben aufstellen:

Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

106) die beiden Seiten und die Mittellinie;

107) die Mittellinie, der Winkel an der Spitze und eine Seite (zwei Auflösungen);

108) die Mittellinie, eine Seite und der Winkel, welchen die Mittellinie mit der andern Seite bildet (zwei Auflösungen);

109) die Mittellinie und die Winkel, welche sie mit den beiden Seiten bildet.

C. Vermischte Aufgaben.

Aufgabe **110 — 111.** Es sind zwei parallele Linien und außerhalb derselben ist ein Punkt P gegeben; man soll durch diesen Punkt eine Linie, welche die Parallelen in den Punkten X und Y schneidet, so ziehen, daß

110) XY einer gegebenen Linie gleich wird;

111) PX + PY einer gegebenen Linie gleich wird.

Aufgabe **112 — 115.** Es sind zwei parallele Linien und auf denselben die Punkte A und B gegeben; ferner ist noch in derselben Ebene, (aber nicht auf den Parallelen) ein Punkt P gegeben; es soll durch diesen Punkt eine Linie, welche die beiden Parallelen in den Punkten X und Y schneidet, jedoch ohne die Verbindungslinie von A und B zu schneiden, so gezogen werden, daß

112) AX = BY wird;

113) AX doppelt so groß als BY wird;

114) AX + BY einer gegebenen Linie gleich wird;

115) AX — BY einer gegebenen Linie gleich wird.

Aufgabe **116 — 119.** Dieselben Aufgaben, jedoch mit der Bedingung, daß die gesuchte Linie AB durchschneidet.

Siebenter Abschnitt.

Von den Vielecken überhaupt.

A. Von den Vielecken im Allgemeinen.

Bemerkung. So wie wir schon über das Viereck weniger Sätze aufgestellt haben, als über das Dreieck, weil sich die Betrachtung von Vierecken allemal auf die von Dreiecken zurückführen läßt, indem wir jedes Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerschneiden können, so übergehen wir aus gleichem Grunde die besondere Betrachtung des Fünfecks, Sechsecks u. s. w. gänzlich, zumal die Sätze über die einzelnen Vielecke um so verwickelter werden, je mehr die Zahl ihrer Seiten wächst. Wir wenden uns nun noch zu solchen Sätzen, welche von allen Vielecken, abgesehen von der Anzahl der Seiten, gelten.

§ 116. Lehrsatz.

Die Summe aller Winkel eines Vielecks, welches nur hohle Winkel hat, beträgt zwei Flache weniger, als das Vieleck Seiten hat.

Beweis. Es sei zunächst das Fünfeck ABCDE (Fig. 68) gegeben. Um die Summe der Winkel desselben zu finden, zerschneide ich dasselbe durch Diagonalen aus einer Ecke A gezogen in die Dreiecke ABC, ACD und ADE. Da die Winkel dieser Dreiecke nach § 56 zusammen drei Flache ausmachen und zusammen genommen den Winkeln des Fünfecks ABCDE gleich sind, so betragen folglich auch die Winkel des Fünfecks zusammen drei Flache.

Eben so finden wir, daß in einem Sechseck die Summe aller Winkel gleich vier Flachen, in einem Siebeneck gleich fünf Flachen und überhaupt in einem Vielecke von n Seiten gleich n — 2 Flachen ist, vorausgesetzt, daß alle Winkel des Vielecks hohl sind.

Anm. Schwieriger ist der Beweis für Vielecke mit erhabenen Winkeln zu führen, da diese sich nicht immer durch Diagonalen, aus einer Ecke gezogen, in Dreiecke zerschneiden lassen. Von Vielecken, deren Seiten nicht unter sich zusammenhängen, wie z. B. von dem Achtecke ABCDEFGH (Fig. 69), gilt der Satz überhaupt nicht.

*§ 117. Lehrsatz.

Jede Seite eines Vielecks ist kleiner, als alle andern Seiten zusammen genommen.

Beweis. Um zu zeigen, daß die Seite AB des Vielecks ABCDE (Fig. 70) kleiner ist, als BC + CD + DE + EA, verbinde ich die Ecke A mit den übrigen Ecken; nun ist in den entstandenen Dreiecken nach § 63

$$AE + DE > AD$$
$$AD + CD > AC$$
$$AC + BC > AB,$$

folglich wenn ich addire:

$$AE + DE + AD + CD + AC + BC > AD + AC + AB,$$

also, wenn ich auf beiden Seiten AD und AC weglasse:

$$AE + DE + CD + BC > AB.$$

*§ 118. Zusatz.

Die gerade Linie, welche zwei Punkte verbindet, ist kürzer, als jede zwischen denselben gezogene, gebrochene oder krumme Linie, (indem nehmlich die krumme Linie sich mit der geraden überhaupt nicht anders vergleichen läßt, als indem man sich dieselbe aus unendlich vielen unendlich kleinen geraden Stücken bestehend denkt).

Anm. Wer auf diese Vorstellung nicht eingehen kann oder will, der wird überhaupt auf die Vergleichung der geraden und krummen Linie verzichten müssen. Alle andern Wege der Vergleichung sind nur Umkleidungen des hier unumwunden Ausgesprochenen.

*§ 119. Lehrsatz.

Wenn zwei Vielecke, deren Winkel sämmtlich hohl sind, eine Seite gemeinschaftlich haben, und im Uebrigen die Seiten des einen Vielecks die des andern einschließen, so ist die Summe der einschließenden Seiten größer, als die der eingeschlossenen.

Bew. Die gegebenen Vielecke seien ABCDEF und ABGHK (Fig. 71). Man verlängere die Seiten des innern Vielecks AK, KH und HG, bis sie die Seiten des äußern in den Punkten L, M und N durchschneiden, dann ist nach § 63 und 117

$$AF + FL > AK + KL$$
$$KL + EL + DE + DM > HK + HM$$
$$HM + CM + CN > GH + GN$$
$$GN + BN > BG.$$

Wenn wir nun das Größere und das Kleinere addiren, auf beiden Seiten das Gleiche KL, HM und GN weglassen und FL + EL durch EF, DM + CM durch CD und CN + BN durch BC ersetzen, so erhalten wir

$$AF + EF + DE + CD + BC > AK + HK + GH + BG.$$

* § 120. Zusatz.

Wenn die Endpunkte einer geraden Linie durch zwei gebrochene oder krumme Linien verbunden sind, welche beide durchweg ihre hohlen Seiten gegen die gerade wenden, und von denen die eine die andere einschließt, so ist die einschließende gebrochene oder krumme Linie größer, als die eingeschlossene.

Anm. Auf diesen Satz gründet sich wesentlich die Ausmessung des Kreises.

B. Von den regelmäßigen Vielecken.

§ 121. Erklärung.

Ein Vieleck, in welchem alle Seiten und alle Winkel einander gleich sind, heißt regelmäßig.

§ 122. Zusatz.

Das gleichseitige Dreieck ist (nach §. 62, 1) regelmäßig, und unter den Vierecken ist das Quadrat eine regelmäßige Figur.

§ 123. Lehrsatz.

In jedem regelmäßigen Vielecke giebt es einen Punkt, welcher von allen Seiten und Winkeln gleichen Abstand hat. Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt des regelmäßigen Vielecks.

Beweis. Der Mittelpunkt eines regelmäßigen Vielecks ABCDEF (Figur 72) wird gefunden, wenn man zwei zusammenstoßende Seiten AB und BC halbirt und in den Halbirungspunkten G und H Lothe errichtet. Der Punkt M, in welchem sich die Lothe schneiden, ist der gesuchte Mittelpunkt.

Um zunächst zu zeigen, daß der Punkt M gleichen Abstand von den Seiten AB und BC hat, d. h. daß $MG = MH$ ist, ziehe ich MB, wodurch die rechtwinkligen Dreiecke MBG und MBH hervorgehen, welche aus Gleichheit der Hypotenuse und einer Cathete congruent sind, nehmlich

$MB = MB$

$BG = BH$, als Hälften der gleichen Polygonseiten AB und BC;

folglich $\triangle MBG \cong MBH$

und daher auch $MG = MH$.

Um ferner zu zeigen, daß der Punkt M auch von der Seite CD denselben Abstand, wie von AB hat, verfahre ich am einfachsten (für den Beweis) so, daß ich zunächst CD im Punkte K

halbire, M mit K verbinde und dann zeige, daß MK senkrecht auf CD steht und gleich mit MG ist. Beides folgt aus der Congruenz der Vierecke MGBH und MHCK, welche in drei Seiten und den zwischenliegenden Winkeln übereinstimmen, nehmlich

S. MH = MH,
S. BH = CH nach der Construction,
S. GB = CK, als Hälften der gleichen Polygonseiten AB u. CD,
W. MHB = MHC, als rechte,
und W. GBH = HCK nach der Voraussetzung,

folglich Viereck MHBG $\cong$ MHCK,
daher auch S. MG = MK
und W. MGB = MKC.

Winkel MGB ist als ein rechter construirt, also ist auch MKC ein rechter und daher MK senkrecht CD.

Auf gleiche Weise läßt sich zeigen, daß der Punkt M auch von den übrigen Seiten des Vielecks gleichen Abstand hat.

Endlich ist noch zu beweisen, daß der Punkt M auch von allen Ecken gleich weit absteht. Um dieses zu zeigen, verbinde ich die Ecken B und C mit M, so ist das entstandene Dreieck BCM nach § 81, 5 gleichschenklig, weil nach der Construction die Höhe MH die Grundlinie BC halbirt, folglich ist MB = MC.

Also hat der Punkt M gleichen Abstand von den Ecken B und C. Eben so kann dasselbe von allen übrigen Ecken erwiesen werden.

Anm. Der vorhergehende Satz gilt auch umgekehrt: Ein Vieleck, dessen Seiten und Ecken von einem innern Punkte sämmtlich gleichen Abstand haben, ist regelmäßig.

Uebungsfrage. Wie berechnet man aus der Anzahl der Seiten eines regelmäßigen Vielecks einen Winkel desselben?

Antwort. Wir wollen zunächst annehmen, das gegebene Vieleck habe acht Seiten; dann betragen nach § 116 alle Winkel desselben zusammen 8 weniger 2, d. h. 6 Flache, und da sie alle gleich sind, so kommen auf einen $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ Flache oder 135^0.

Ist überhaupt n die Anzahl der Seiten eines regelmäßigen Vielecks, so sind alle Winkel zusammen $= (n - 2)\pi$, also einer allein $= \frac{(n-2)\pi}{n}$ $= \pi - \frac{2\pi}{n}$, oder in Graden ausgedrückt $= 180^0 - \frac{360^0}{n}$.

Der Winkel eines regelmäßigen Vielecks wird also um so größer, je mehr Seiten das Vieleck hat; er nähert sich um so mehr einem Flachen, ohne jedoch diesen jemals zu erreichen.

Bemerkung. Je größer die Zahl der Seiten eines regelmäßigen Vielecks ist, um so mehr nähert sich dasselbe dem Kreise. Es bilden daher die Sätze vom regelmäßigen Vielecke den natürlichen Uebergang zur Betrachtung des Kreises.

Achter Abschnitt.

Vom Kreise.*)

A. Der Kreis und die gerade Linie.

1. Die Sehne.

*§ 124. Lehrsatz.

Eine (gerade) Linie AB (Fig. 73), welche zwei Punkte des Kreises verbindet, liegt ganz innerhalb, ihre Verlängerungen BD und AE aber liegen ganz außerhalb des Kreises.

Beweis. Wenn ich aus dem Mittelpunkte C auf AB das Loth CF fälle, ferner auf AB einen beliebigen Punkt H annehme und C mit A, B, G und H verbinde, so ist nach § 79 $CG < CB$, aber $CH > CB$. Demnach liegt der Punkt G innerhalb, der Punkt H aber außerhalb des Kreises, weil des erstern Abstand vom Mittelpunkte kleiner, des letztern Abstand vom Mittelpunkte aber größer ist, als der Radius CB. — Auf gleiche Weise läßt sich zeigen, daß auch alle andern Punkte auf der Linie AB innerhalb und alle Punkte der Verlängerungen außerhalb des Kreises liegen.

Anm. 1. Das Loth aus C auf AB gefällt kann nicht auf die Verlängerung der Linie AB treffen, da ABC ein gleichschenkliges Dreieck ist.

Anm. 2. Eigentlich müssen bei dem vorhergehenden Satze zwei Fälle unterschieden werden, je nachdem AB durch den Mittelpunkt geht oder nicht. Der Beweis ist nur für den letzten Fall geführt, indem für den ersten Fall die Richtigkeit des Satzes sich noch viel leichter ergiebt.

Bemerkung. Die Beweise für die Sätze vom Kreise werden dadurch erhalten, daß man die betreffenden Punkte mit dem Mittelpunkte verbindet und hierdurch die zu erweisenden Behauptungen auf Dreieckssätze zurückführt.

*) Der Anfänger wird wohl thun, ehe er zu diesem Abschnitte übergeht die §§ 8 — 16 und §§ 33 — 35 zu wiederholen.

§ 125. Lehrsatz.

Der Durchmesser AB (Fig. 74) ist größer, als jede andere Sehne DE, (welche nicht durch den Mittelpunkt geht).

Beweis. Ich ziehe die Radien CD und CE, so entsteht ein Dreieck CDE. In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten größer, als die dritte, also ist

$$CD + CE > DE.$$

Statt CD kann ich CA und statt CE kann ich CB setzen; folglich ist $CA + CB$ d. h. $AB > DE$.

§ 126. Lehrsatz.

1) Wenn ich eine Sehne AB (Fig. 75) halbire und den Halbirungspunkt D mit dem Mittelpunkte C verbinde, so ist die Verbindungslinie CD auf der Sehne AB senkrecht.

2) Ein Loth CD, aus dem Mittelpunkte C auf die Sehne AB gefällt, halbirt diese, so wie auch den Centriwinkel ACB und den zugehörigen Bogen AEB.

3) Ein Loth auf der Sehne AB im Halbirungspunkte D errichtet, geht durch den Mittelpunkt C.

Die Beweise dieser Sätze sind, wenn man sich den Mittelpunkt C mit den Endpunkten der Sehne verbunden denkt, bereits in § 81 geführt worden.

Anm. Man kann den letzten der eben erwiesenen Sätze benutzen, um von einem gegebenen Kreise den Mittelpunkt zu finden, wenn dieser nicht mit gegeben sein sollte. Zieht man nehmlich eine willkührliche Sehne AB (Figur 75), halbirt dieselbe in D und zieht durch D senkrecht auf AB eine Linie, welche den Kreis in E und F schneidet, so ist EF ein Durchmesser, und man erhält daher den gesuchten Mittelpunkt, wenn man EF in C halbirt.

§ 127. Lehrsatz.

1) Gleiche Sehnen haben gleichen Abstand vom Mittelpunkte.

2) Die größere Sehne hat einen kleineren Abstand vom Mittelpunkte.

Beweis. 1) Die gleichen Sehnen seien AB und DE (Fig. 76) und aus dem Mittelpunkte C seien auf dieselben die Lothe CF und CG gefällt. Um nun die Gleichheit dieser Lothe zu erweisen, ziehe ich die Radien CB u. CD; dann entstehen die rechtwinkligen Dreiecke CFB und CGD, welche congruent sind, weil sie in der Hypotenuse und einer Cathete übereinstimmen, nehmlich

Hypotenuse CB = CD, als Radien
und . Cathete BF = DG, als Hälften der gleichen Sehnen AB und ED,

folglich △ CFB ≅ CGD nach § 77
und daher auch Seite CF = CG.

2) Wenn aber Sehne AB > DE (Fig. 77) ist, so ist das Loth CF < CG. Denn wenn ich CB und CD ziehe, so entstehen wieder zwei rechtwinklige Dreiecke CFB und CGD; in diesen ist

Hypotenuse CB = CD,
aber Cathete BF > DG, weil Sehne AB > DE vorausg. ist,

folglich Cathete CF < CG nach § 78.

§ 128. Zusatz.

Es folgt aber auch weiter hieraus leicht indirect oder läßt sich eben so, wie § 127 erweisen, daß

1) zwei Sehnen einander gleich sind, wenn sie gleichen Abstand vom Mittelpunkte haben, und daß

2) bei ungleichen Abständen vom Mittelpunkte diejenige Sehne die größere ist, welche den kleinern Abstand vom Mittelpunkte hat.

Bemerkung. Wenn man in einem Kreise eine beliebige Sehne AB (Fig. 75) zieht, so theilen die Endpunkte derselben den Kreis im Allgemeinen in zwei ungleiche Bogen, von denen der eine AFB größer, der andere AEB kleiner, als ein Halbkreis ist. Es gehören also zu derselben Sehne zwei verschiedene Bogen, während vermöge § 4 zu jedem Bogen immer nur eine Sehne gehören kann. Um nun Zweideutigkeiten vorzubeugen, wollen wir im Folgenden, wenn von dem zu einer Sehne AB gehörigen Bogen die Rede ist, allemal den kleinen Bogen AEB verstehen, wenn nicht ausdrücklich gesagt ist, daß der größere Bogen AFB gemeint sein soll.

§ 129. Lehrsatz.

1) Gleiche Sehnen haben gleiche Bogen (in demselben Kreise oder in Kreisen, welche mit gleichen Radien beschrieben sind).

2) Zur größern Sehne gehört auch ein größerer Bogen.

Beweis. 1) Wenn die Sehne AB = DE (Fig. 78) vorausgesetzt ist und ich die Radien AC, BC, DG und EG ziehe, so entstehen zwei Dreiecke ABC und DEG, welche congruent sind, weil sie in den drei Seiten übereinstimmen, nehmlich

$$\left.\begin{array}{l} AC = DG \\ BC = EG \end{array}\right\} \text{als Radien,}$$

$AB = DE$ vorausgesetzt,

folglich $\triangle ABC \cong DEG$,

daher Winkel $C = G$

und also auch, da zu gleichen Centriwinkeln gleiche Bogen gehören, Bogen $AB = DE$.

2) Wenn aber Sehne $AB > DE$ (Fig. 79) vorausgesetzt ist, so muß auch Bogen $AB > DE$ sein. Denn wenn ich wieder die Radien AC, BC, DG und EG ziehe, so ist in den entstandenen Dreiecken ABC und DEG

$$\left.\begin{array}{l} AC = DG \\ BC = EG \end{array}\right\} \text{als Radien,}$$

aber $AB > DE$ vorausgesetzt,

folglich Winkel $C > G$ nach § 72,

und daher auch Bogen $AB > DE$.

§ 130. Lehrsatz.

1) Zu gleichen Bogen gehören auch gleiche Sehnen und

2) zum größern Bogen gehört eine größere Sehne.

Beweis. 1) Wenn der Bogen $AB = DE$ (Fig. 78) gegeben ist, so muß auch die Sehne $AB = DE$ sein; denn wenn ich die Radien AC, BC, DG und EG ziehe, so entstehen zwei Dreiecke ABC und DEG, welche congruent sind, weil sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, nehmlich

$$\left.\begin{array}{l} AC = DG \\ BC = EG \end{array}\right\} \text{als Radien,}$$

W. $C = G$, weil Bogen $AB = DE$ vorausg. ist,

folglich $\triangle ABC \cong DEG$

und daher auch $AB = DE$.

2) Wenn aber Bogen $AB > DE$ (Fig. 79) gegeben ist, so ist in den Dreiecken ABC und DEG

$$\left.\begin{array}{l} AC = DG \\ BC = EG \end{array}\right\} \text{als Radien,}$$

und

aber W. $C > G$, weil Bogen $AB > DE$ vorausg. ist,

folglich Seite $AB > DE$ nach § 70.

2. Die Tangente und Sekante.

§ 131. Lehrsatz.

1) Eine Linie, welche auf dem Radius in seinem Endpunkte senkrecht steht, ist eine Tangente.

2) Eine Linie dagegen, welche, durch den Endpunkt des Radius gezogen, mit demselben schiefe Winkel bildet, schneidet den Kreis.

Beweis. 1) Wenn die Linie AD (Fig. 80) auf dem Radius BC in seinem Endpunkte B senkrecht steht und ich nehme auf dieser Linie einen willkührlichen Punkt E an und verbinde denselben mit dem Mittelpunkte C, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck CBE, weil Winkel ABC nach der Voraussetzung ein rechter ist. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist aber die Hypotenuse größer, als jede Cathete, also $CE > CB$; und da CB ein Radius ist, so liegt folglich der Punkt E außerhalb des Kreises. Dasselbe kann eben so von jedem andern Punkte der Linie AD erwiesen werden (mit Ausnahme des Punktes B, welcher auf dem Kreise liegt). Demnach ist AD eine Tangente.

2) Wenn aber die Linie AD (Fig. 81) mit dem Radius BC schiefe Winkel bildet, z. B. Winkel ABC < und Winkel DBC > 90^0 ist, so muß die Linie AB den Kreis schneiden. Um dieses darzuthun, brauche ich vermöge § 15 nur zu zeigen, daß AB einen Punkt innerhalb des Kreises hat. Einen solchen finde ich, wenn ich vom Mittelpunkte C ein Loth CE auf AD fälle. Dann entsteht ein rechtwinkliges Dreieck BEC, in welchem die Cathete CE kleiner, als die Hypotenuse BC ist. Demnach liegt der Punkt E innerhalb des Kreises, weil sein Abstand vom Mittelpunkte kleiner ist, als der Radius, und folglich schneidet AB den Kreis, weil sie einen Punkt innerhalb desselben hat.

§ 132. Zusatz.

1) Der Radius BC, welcher den Berührungspunkt B mit dem Mittelpunkte C verbindet, ist auf der Tangente AD senkrecht (Fig. 82).

2) Ein Loth BE, auf der Tangente AD im Berührungspunkte B errichtet, geht durch den Mittelpunkt.

Beweis. 1) Wenn die Linie AD mit dem Radius BC schiefe Winkel bildete, so müßte sie nach (2) des vorhergeh. § den Kreis schneiden und könnte folglich keine Tangente sein.

2) Wenn der Mittelpunkt nicht in dem Lothe BE, sondern außerhalb desselben in G läge, und ich ziehe GB, so wäre diese

Linie ein Radius und müßte folglich nach Nr. 1 auf der Tangente AD senkrecht sein, welches nicht möglich ist, da schon BE ⊥ AD gegeben ist. Demnach kann der Mittelpunkt nicht außerhalb BE, sondern er muß auf BE liegen.

Bemerkung. Durch einen Punkt auf dem Kreise kann ich zu Folge des vorhergeh. § nur eine Tangente ziehen. Da ich aber auf einem Kreise unzählige Punkte annehmen kann, so lassen sich auch an jeden Kreis unzählige Tangenten ziehen. Ziehe ich nun an einen Kreis zwei Tangenten AB und AD (Fig. 83), welche sich in A schneiden, so gelange ich leicht zu dem folgenden Satze.

§ 133. Zusatz.

1) Wenn aus einem Punkte A (Fig. 83) außerhalb des Kreises zwei Tangenten AB und AD gezogen sind, so sind dieselben gleich lang und die Linie AC, welche den gemeinschaftlichen Punkt A mit dem Mittelpunkte C verbindet, halbirt den Winkel BAD, welchen die Tangenten einschließen, und umgekehrt:

2) Die Linie AC, welche den Winkel halbirt, den zwei Tangenten AB und AD einschließen, geht durch den Mittelpunkt.

Beweis. 1) Wenn ich die Radien BC und CD ziehe, so sind die entstandenen Dreiecke ABC und ADC zunächst rechtwinklig, weil nach § 132, 1 der Radius allemal auf der Tangente senkrecht steht, und zweitens congruent, weil sie in der Hypotenuse und einer Cathete übereinstimmen, nehmlich

Hypotenuse AC = AC

und Cathete BC = CD, als Radien,

folglich △ ABC ≅ ADC,

daher auch AB = AD

und Winkel BAC = DAC,

also Winkel BAD durch AC halbirt.

(2) folgt leicht indirect aus (1).

§ 134. Lehrsatz.

Eine gerade Linie und ein Kreis können in einer Ebene eine dreifache Lage gegen einander haben.

1) Die gerade Linie AD (Fig. 81) schneidet den Kreis, wenn ihr Abstand CE vom Mittelpunkte C kleiner ist, als der Radius (nach § 15).

2) Die gerade Linie AD (Fig. 82) berührt den Kreis, wenn ihr Abstand BC vom Mittelpunkte C gleich dem Radius ist (nach § 131, 1). Endlich

3) Die gerade Linie AD (Fig. 84) liegt ganz außerhalb des Kreises und trifft in keinem Punkte mit demselben zusammen, wenn ihr Abstand BC vom Mittelpunkte C größer ist, als der Radius.

Denn zunächst muß der Punkt B außerhalb des Kreises liegen, weil BC größer, als der Radius vorausgesetzt ist; und dasselbe muß um so mehr von jedem beliebigen andern Punkte E auf der Linie AB gelten, da nach § 79 CE noch > BC ist.

Anm. Dieser Satz bildet eine Analogie zu § 10.

3. Der Peripheriewinkel.

§ 135. Erklärung.

Ein Winkel (ADB, Fig. 85), dessen Scheitel auf der Peripherie liegt, und dessen Schenkel den Kreis durchschneiden, heißt ein Peripheriewinkel.

Der zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels (ADB) liegende Bogen (AB) heißt der zum Peripheriewinkel gehörige Bogen.

Bemerkung. Ueber demselben Bogen AB (Fig. 85) kann man nur einen Centriwinkel ACB, dagegen unzählige Peripheriewinkel zeichnen. Wir unterscheiden hierbei drei Hauptlagen. 1) Ein Schenkel AE des Peripheriewinkels AEB kann durch den Mittelpunkt C gehen. 2) Der Mittelpunkt C kann zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels ADB liegen, und 3) der Mittelpunkt kann außerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels AFB liegen. — In allen Fällen aber gilt der folgende merkwürdige Satz:

§ 136. Lehrsatz.

Der Centriwinkel ist doppelt so groß, als der Peripheriewinkel, welcher mit ihm auf gleichem Bogen steht.

Beweis. Erster Fall. Wenn ein Schenkel des Peripheriewinkels AEB durch den Mittelpunkt geht (Fig. 86, a).

Der Centriwinkel ACB ist zugleich Außenwinkel des Dreiecks BCE und daher so groß, als die innern gegenüberstehenden Winkel B und E zusammen. Die Winkel B und E sind aber gleich, weil in dem Dreiecke BCE die Seiten BC und CE gleich sind, als Radien. Folglich ist Winkel ACB doppelt so groß, als E allein.

Zweiter Fall. Wenn der Mittelpunkt C zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels ADB liegt (Fig. 86, b).

Um zu zeigen, daß der Centriwinkel ACB doppelt so groß ist, als der Peripheriewinkel ADB, ziehe ich durch D den Durchmesser DG. Nun ist der vorhergehende Fall zweimal entstanden, nehmlich

der Centriwinkel ACG mit dem Peripheriewinkel ADG, und der Centriwinkel BCG mit dem Peripheriewinkel BDG. Nach Nr. 1 ist

Winkel ACG doppelt so groß, als ADG
und Winkel BCG = = = = BDG,
folglich wenn ich addire:
W. ACG und BCG zusammen doppelt so groß, als ADG und BDG,
d. h. W. ACB doppelt so groß, als ADB.

Dritter Fall. Wenn der Mittelpunkt C außerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels AFB liegt (Fig. 86, c).

Ich ziehe wieder durch F den Durchmesser FH und erhalte so den ersten Fall zweimal, nehmlich Centriwinkel HCB mit dem Peripheriewinkel HFB und Centriwinkel HCA mit dem Peripheriewinkel HFA. Nach Nr. (1) ist

W. HCB doppelt so groß, als HFB
und W. HCA = = = = HFA,
folglich wenn ich subtrahire
W. HCB weniger HCA doppelt so groß, als HFB weniger HFA,
d. h. W. ACB doppelt so groß, als AFB.

§ 137. Zusatz.

1) Alle Peripheriewinkel auf gleichen Bogen sind gleich, weil sie die Hälften gleicher Centriwinkel sind.

2) Zum größern Bogen gehört auch ein größerer Peripheriewinkel, weil zum größern Bogen ein größerer Centriwinkel gehört und der Peripheriewinkel die Hälfte des Centriwinkels ist, der mit ihm auf gleichem Bogen steht.

3) Zu gleichen Peripheriewinkeln gehören auch gleiche Bogen und zum größeren Peripheriewinkel gehört auch ein größerer Bogen.

4) Alle Peripheriewinkel, welche in demselben Kreisabschnitte liegen, sind gleich, weil sie auf demselben Bogen stehen.

5) Der Peripheriewinkel ABF im Halbkreise ist ein rechter, weil sein Centriwinkel ACF ein Flacher ist (Fig. 88, a).

6) Der Peripheriewinkel, welcher auf einem Bogen steht, welcher kleiner, als die halbe Peripherie ist, ist kleiner, als ein rechter, also ein spitzer, weil sein Centriwinkel kleiner, als ein Flacher ist.

7) Der Peripheriewinkel, welcher auf einem Bogen steht, der größer, als ein Halbkreis ist, ist größer, als ein rechter, also ein stumpfer, weil der zugehörige Centriwinkel ein erhabener ist.

8) Der Peripheriewinkel hat halb so viel Grade, als der zu-

gehörige Bogen, weil der Bogen eben so viel Grade hat, als der Centriwinkel.

§ 138. Zusatz.

1) Wenn zwei Sehnen AB und CD (Fig. 87) parallel laufen, so sind die zwischen ihnen liegenden Bogen AC und BD gleich.

Denn wenn ich BC ziehe, so ist Winkel B = C als Wechselwinkel zwischen den parallelen AB und CD und folglich auch Bogen AC = BD, weil zu gleichen Peripheriewinkeln auch gleiche Bogen gehören (nach Nr. 3 des vorhergeh. §).

2) Umgekehrt: Zwei Sehnen AB und CD, welche von einem Kreise gleiche Bogen AC und BD abschneiden, sind parallel.

Denn wenn ich wieder BC ziehe, so ist Winkel B = C, weil Bogen AC = BD gegeben ist; folglich ist auch AB || CD, weil ein Paar Wechselwinkel B und C gleich sind.

Bemerkung. Wenn man durch den Berührungspunkt A (Fig. 88, a u. b) einer Tangente DE eine willkührliche Sehne AB zieht, so entstehen zwei Kreisabschnitte, von denen der eine ABF den Mittelpunkt enthält, der andere ABG nicht *), und zwei Nebenwinkel BAD und BAE, von denen Winkel BAD dem Abschnitte ABF und Winkel BAE dem Abschnitte BAG gegenüberliegt. Zwischen diesen Winkeln und Kreisabschnitten findet die merkwürdige Beziehung des folgenden Satzes statt.

§ 139. Lehrsatz.

Der Winkel, welchen die Sehne (AB) mit der Tangente (DE) bildet, ist dem Winkel im entgegengesetzten Abschnitte gleich.

Beweis. 1) Für den Abschnitt, in welchem der Mittelpunkt liegt (Fig. 88, a). — Um zu zeigen, daß der Winkel α gleich ist einem Peripheriewinkel im entgegengesetzten Abschnitte ABF, zeichne ich den für den Beweis am meisten geeigneten Peripheriewinkel γ, indem ich durch den Berührungspunkt A den Durchmesser AF ziehe und F mit B verbinde. — Der Winkel ABF ist ein rechter, als Winkel im Halbkreise, folglich bleibt für β und γ zusammen noch ein rechter übrig. Die Winkel α u. β betragen ebenfalls zusammen einen rechten, weil die Tangente DE nach § 132, 1 auf dem Radius AC senkrecht steht. Da nun β u. γ einen rechten ausmachen und α u. β auch, so muß folglich $\gamma = \alpha$ sein. — Dasselbe gilt auch

*) Vorausgesetzt, daß AB nicht selbst durch den Mittelpunkt geht.

von jedem andern in den Abschnitt AFB zu zeichnenden Winkel, weil alle Peripheriewinkel in demselben Kreisabschnitte gleich sind (§ 137, 4).

2) Für den Abschnitt, in welchem der Mittelpunkt nicht liegt (Fig. 88, b). — Um zu zeigen, daß der Winkel EAB = AGB ist, ziehe ich wieder einen Durchmesser AF durch den Brechungspunkt A und verbinde F mit G. Dann ist Winkel α ein rechter, weil die Tangente auf dem Durchmesser senkrecht steht; und Winkel γ ist ein rechter, als Winkel im Halbkreise; also ist $\alpha = \gamma$. Ferner ist Winkel $\beta = \delta$, als Peripheriewinkel auf dem nehmlichen Bogen BF. Da nun Winkel $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$ erwiesen ist, so ist folglich auch der ganze Winkel EAB = AGB, w. z. e. w.

Anm. Wenn die Sehne durch den Mittelpunkt geht, so bedarf es keines besonderen Beweises für die Richtigkeit unseres Satzes, weil schon in den §§ 132 und 137 erwiesen ist, daß sowohl der Winkel, welchen die Tangente und ein Durchmesser einschließen, als auch der Winkel, welcher im Halbkreise liegt, ein rechter ist.

4. Vielecke in und um den Kreis.

§ 140. Erklärung.

Ein Vieleck (ABDEFGHK, Fig. 94) heißt in den Kreis beschrieben, wenn seine Seiten Sehnen sind, und ein Vieleck (LMNOPQRS, Fig. 95) heißt um den Kreis beschrieben, wenn seine Seiten Tangenten sind.

§ 141. Zusatz.

Wenn ein Dreieck in einen Kreis beschrieben ist, so kann der Mittelpunkt des Kreises in Beziehung auf das Dreieck eine dreifache Lage haben. Er fällt nehmlich innerhalb des Dreiecks, wenn das Dreieck spitzwinklig ist; auf eine Seite, wenn es rechtwinklig, und außerhalb des Dreiecks, wenn es stumpfwinklig ist.

Die Beweise für diese Behauptungen sind in § 137 enthalten.

§ 142. Lehrsatz.

1) Wenn ein Viereck in einen Kreis beschrieben ist, so betragen je zwei gegenüberstehende Winkel einen Flachen; und

2) wenn ein Viereck um einen Kreis beschrieben ist, so sind die Summen der gegenüberstehenden Seiten einander gleich.

Beweis. Um zu zeigen, daß in dem in den Kreis beschriebenen Vierecke ABDE (Fig. 89) zwei gegenüberstehende Winkel,

z. B. A und D, einen Flachen betragen, verbinde ich die beiden andern Ecken B und E mit dem Mittelpunkte. — Der Peripheriewinkel A ist nun die Hälfte des (erhabenen) Centriwinkels α, und der Peripheriewinkel D ist die Hälfte des (hohlen) Centriwinkels δ. Die Winkel α und δ machen zusammen zwei Flache aus, folglich betragen A und D zusammen einen Flachen.

2) Das um den Kreis beschriebene Viereck sei ABDE (Fig. 90). — In § 133 haben wir gesehen, daß wenn aus einem Punkte zwei Tangenten an einen Kreis gehen, dieselben einander gleich sind; folglich ist $a = h$,

$b = c$,

$e = d$,

und $f = g$,

also wenn wir addiren:

$$a + b + e + f = h + c + d + g,$$

d. h. $AB + ED = BD + AE$.

Anm. Ueberhaupt läßt sich leicht zeigen, daß in einem jeden in den Kreis beschriebenen Vielecke von gerader Seitenzahl die Summe aus dem ersten, dritten, fünften Winkel u. s. w. gleich ist der Summe aus dem zweiten, vierten, sechsten Winkel u. s. w.; — und bei einem um den Kreis beschriebenen Vielecke von gerader Seitenzahl die Summe aus der ersten, dritten, fünften Seite u. s. w. gleich ist der Summe aus der zweiten, vierten, sechsten Seite u. s. w.

§ 143. Lehrsatz.

Um jedes Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben.

Beweis. (Wenn ein Dreieck in einen Kreis beschrieben ist, so sind nach § 140 die Seiten des Dreiecks Sehnen, und der Mittelpunkt muß folglich nach § 126 in jedem der Lothe liegen, welche ich in den Mitten der Seiten errichte. Ich finde daher den Mittelpunkt durch folgendes Verfahren:) — Ich halbire zwei Seiten AB und BC des gegebenen Dreiecks ABC (Fig. 91) und errichte in den Halbirungspunkten D und E Lothe, welche sich nach § 47 durchschneiden müssen. Der Durchschnittspunkt M ist der Mittelpunkt des um das Dreieck ABC zu beschreibenden Kreises. — Denn wenn ich zunächst M mit A und B verbinde, so ist das entstandene Dreieck AMB nach § 81, 5 gleichschenklig, weil die Grundlinie desselben AB zu Folge der Construction durch die Höhe DM halbirt ist; also ist $AM = BM$. Aus gleichen Gründen ist auch, wenn ich M mit C verbinde, $CM = BM$. — Da nun $AM = BM = CM$ ist, so geht ein

Kreis, welcher mit einer dieser Linien um den Punkt M beschrieben wird, durch die drei Ecken des gegebenen Dreiecks ABC.

§ 144. Zusatz.

Aus dem vorhergeh. § folgt unmittelbar, daß sich durch jede drei Punkte A, B und C, welche nicht in gerader Linie liegen, ein Kreis beschreiben läßt, und da der Mittelpunkt nach § 126 sowohl in dem Lothe DM, als auch in dem Lothe EM liegen muß, also allein in dem Durchschnittspunkte M beider Lothe liegen kann, so geht hieraus weiter hervor, daß sich durch drei Punkte nur ein einziger Kreis beschreiben läßt.

Anm. Ein Kreis ist also vollständig bestimmt, wenn von demselben drei Punkte gegeben sind. — Zwei Punkte A und B (Fig. 91) allein reichen für diesen Zweck nicht aus, da jeder Punkt des Lothes DM Mittelpunkt eines Kreises sein kann, welcher durch die Punkte A und B geht. — Durch vier Punkte A, B, D und E (Fig. 89) ist es nicht immer möglich, einen Kreis zu legen; dieß ist nur dann der Fall, wenn in dem Viereck ABDE zwei gegenüberstehende Winkel einen Flachen betragen. Von den Parallelogrammen läßt sich daher allein um das Rechteck ein Kreis beschreiben. — Weiter ist auch nicht schwer zu sehen, wie man zu verfahren hat, um zu untersuchen, ob sich durch fünf oder mehr Punkte ein Kreis beschreiben läßt.

§ 145. Lehrsatz.

In jedes Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben.

Beweis. (Wenn ein Dreieck um einen Kreis beschrieben ist, so sind die Seiten desselben nach § 140 Tangenten, und nach § 133 liegt der Mittelpunkt allemal in der Halbirungslinie des Winkels, welchen zwei Tangenten einschließen. Ich finde daher den gesuchten Mittelpunkt auf folgende Weise:) — Ich halbire zwei Winkel A und B des gegebenen Dreiecks ABC (Fig. 92). — Der Punkt M, in welchem die Halbirungslinien sich schneiden, ist der Mittelpunkt des in das Dreieck zu beschreibenden Kreises. — Denn wenn ich aus M auf die Seiten des Dreiecks ABC die Lothe MD, ME und MF fälle, so ist zunächst Dreieck AMD $\cong$ AMF, weil sie in einer Seite einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, nehmlich AM = AM,

W. DAM = FAM gemacht,

W. ADM = AFM, als Rechte,

folglich $\triangle$ AMD $\cong$ AMF

und daher auch MD = MF.

Eben so wird erwiesen, daß

$$\triangle BMD \cong BME,$$

also auch $MD = ME$

ist. — Da nun MD = MF = ME ist, so geht ein mit einer dieser Linien um den Punkt M beschriebener Kreis durch die drei Punkte D, E und F, und er berührt in diesen Punkten die Seiten des Dreiecks ABC, (— er schneidet sie nicht —), weil diese nach der Construction auf den drei Radien MD, ME und MF senkrecht sind.

Anm. Daß sich in das Dreieck ABC nur ein Kreis beschreiben läßt, geht daraus hervor, weil sein Mittelpunkt sowohl auf der Halbirungslinie AM, als auch auf BM liegen muß.

In ein Viereck kann ein Kreis nur dann beschrieben werden, wenn die Summen zweier gegenüberstehenden Seiten einander gleich sind. — Von den Parallelogrammen läßt sich daher allein in den Rhombus ein Kreis beschreiben. Das Quadrat aber ist das einzige Parallelogramm, in und um welches man einen Kreis beschreiben kann.

§ 146. Lehrsatz.

Um und in jedes regelmäßige Vieleck läßt sich ein Kreis beschreiben.

Die Beweise sind in § 123 enthalten.

§ 147, a. Zusatz.

Die Seite des regelmäßigen Sechsecks ist dem Radius des umschriebenen Kreises gleich.

Beweis. Wenn ich die Endpunkte einer Seite AB (Fig. 93) mit dem Mittelpunkte C verbinde, so hat der entstandene Centriwinkel γ 60°, weil der Bogen AB der sechste Theil der Peripherie ist. Demnach bleiben für die beiden Winkel α u. β zusammen noch 120° übrig, und da sie gleich sind, weil die Seiten AC und BC, als Radien gleich sind, so kommen auf jeden 60°. Demnach hat das Dreieck ABC lauter gleiche Winkel und folglich auch gleiche Seiten, also ist AB = AC.

Anm. Hieraus ergiebt sich vermöge des folgenden Paragraphs ein leichtes Verfahren, in einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Sechseck zu zeichnen.

§ 147, b. Lehrsatz.

Wenn man die Peripherie eines Kreises in eine vorgeschriebene Anzahl, z. B. in acht gleiche Theile theilt und

1) zwischen den auf einander folgenden Theilungspunkten A,

B, D . . . (Fig. 94) Sehnen zieht, so entsteht ein regelmäßiges Vieleck ABDEFGHK im Kreise.

2) Wenn man aber durch die Theilungspunkte A, B, D . . . (Fig. 95) Tangenten zieht, so erhält man ein regelmäßiges Vieleck LMNOPQRS um den Kreis.

Beweis. 1) Da Bogen AB = BD = DE . . . ist, so ist auch nach § 130 Sehne AB = BD = DE . . ., also hat das Vieleck ABCDEFGH lauter gleiche Seiten. Zweitens hat es auch gleiche Winkel, weil diese Peripheriewinkel auf gleichen Bogen sind. So steht z. B. Winkel KAB auf dem Bogen BDEFGHK und Winkel ABD auf dem Bogen DEFGHKA, und diese Bogen sind zufolge der Construction einander gleich, (jeder enthält $^6/_8$ der Peripherie), folglich ist auch W. KAB = ABD. Dasselbe gilt eben so von den übrigen Winkeln D, E, F . . . Demnach ist das Vieleck ABDEFGHK regelmäßig.

2) Wenn man den Mittelpunkt C mit den Berührungspunkten A, B, D . . . (Fig. 95) verbindet, so entstehen die Vierecke CALB, CBMD . . ., welche congruent sind, weil sie in drei Winkeln und den beiden zwischenliegenden Seiten übereinstimmen, nehmlich

W. ACB = BCD, weil Bogen AB = BD vorausg. ist;
W. CAL = CDM }
W. CBL = CBM } als Rechte,
BC = BC
und AC = CD als Radien,

folglich Viereck CALB ≅ CDMB,
daher auch W. L = M,
S. BL = BM,
und folglich Seite LM im Punkte B halbirt.

Eben so läßt sich auch zeigen, daß
Viereck CBMD ≅ CEND
und daher W. M = N,
S. DM = DN
und folglich Seite MN im Punkte D halbirt ist.

Nach § 133 ist aber die halbe Seite BM = DM, weil sie aus dem nehmlichen Punkte M als Tangenten an den Kreis gezogen sind; folglich muß auch sein die ganze Seite:

LM = MN.

So wie wir nun Seite LM = MN und Winkel L = M = N erwiesen haben, eben so lassen sich auch die übrigen Seiten und Winkel des Vielecks LMNOPQRS als gleich erweisen.

B. Zwei Kreise.

§ 148. Erklärung.

Die Linie, welche die Mittelpunkte zweier excentrischen Kreise verbindet, heißt **Centrallinie**.

Bemerkung. Wenn ich um zwei gegebene Mittelpunkte A und B zwei Kreise beschreibe, so sind überhaupt zwei Fälle möglich, entweder die Kreise treffen irgendwo zusammen, oder sie haben gar keinen Punkt gemeinschaftlich. Im letztern Falle kann der eine Kreis ganz außerhalb des andern liegen (Fig. 96), oder der eine Kreis kann den andern einschließen (Fig. 100). — Wenn aber die Kreise sich treffen sollen, so sind wieder drei Fälle denkbar; sie können sich schneiden oder von Außen oder von Innen berühren (Fig. 97—99). Denke ich mir außer den Mittelpunkten A und B auch noch den Punkt C des Zusammentreffens gegeben, so hängt Alles von der Lage dieses Punktes ab, wie im folgenden § gezeigt wird.

§ 149. Lehrsatz.

Wenn zwei Kreise einen Punkt gemeinschaftlich haben, so können drei Fälle statt finden:

1) Wenn der gemeinschaftliche Punkt C auf der Centrallinie AB liegt, so berühren sich die Kreise von Außen (Fig. 97);

2) wenn der gemeinschaftliche Punkt C in der Verlängerung der Centrallinie AB liegt, so berühren sich die Kreise von Innen (Fig. 99); und endlich

3) wenn der gemeinschaftliche Punkt C zur Seite der Centrallinie AB liegt, so durchschneiden sich die Kreise (Fig. 98, a u. b).

Beweis. 1) Um zu zeigen, daß der um B beschriebene Kreis (Fig. 97) ganz außerhalb des um A beschriebenen Kreises liegt, nehme ich auf demselben einen beliebigen Punkt D an und verbinde denselben mit beiden Mittelpunkten A und B. In dem entstandenen Dreiecke ADB ist die Summe zweier Seiten größer, als die dritte; also $AD + BD > AC + BC$

und daher, wenn ich das Gleiche BD und BC weglasse:

$$AD > AC.$$

Demnach liegt der Punkt D außerhalb des um A beschriebenen Kreises, weil sein Abstand AD vom Mittelpunkte A größer ist, als der Radius AC. Dasselbe gilt eben so von jedem andern Punkte des um B beschriebenen Kreises mit Ausnahme des Punktes C, welchen beide Kreise gemeinschaftlich haben.

2) Um zu zeigen, daß der um B beschriebene Kreis (Fig. 99) ganz innerhalb des um A beschriebenen Kreises liegt, nehme ich auf demselben einen willkührlichen Punkt D an und verbinde ihn mit beiden Mittelpunkten A und B. In dem entstandenen Dreiecke ABD ist

$$AB + BD > AD,$$

oder da ich statt BD auch BC setzen kann:

$$AB + BC \text{ d. h. } AC > AD.$$

Da nun AC ein Radius des Kreises um A ist, so liegt folglich der Punkt D innerhalb dieses Kreises. Das Nehmliche gilt von allen andern Punkten des um B beschriebenen Kreises mit Ausnahme des beiden Kreisen gemeinschaftlichen Punktes C.

3) Wenn der gemeinschaftliche Punkt C zur Seite der Centrallinie AB liegt (Fig. 98, a u. b), so haben die Kreise noch einen Punkt an der entgegengesetzten Seite der Centrallinie gemeinschaftlich. Wenn ich nehmlich C mit A und B verbinde und mir das entstandene Dreieck ABC so umgelegt denke, daß AB liegen bleibt und der Punkt C in D fällt, so muß auch D beiden Kreisen gemeinschaftlich sein. Der Punkt D liegt nehmlich erstens auf dem um A beschriebenen Kreise, weil zu Folge der Construction AD gleich dem Radius AC ist; und der Punkt D liegt zweitens auch auf dem um B beschriebenen Kreise, weil BD gleich dem Radius BC ist. Da hiernach die Kreise zwei Punkte C und D gemeinschaftlich haben, so können sie sich nicht berühren, sondern sie schneiden sich.

Anm. 1. Da nach § 144 sich durch drei Punkte allemal nur ein Kreis legen läßt, so folgt hieraus, daß die beiden sich schneidenden Kreise (Fig. 98) außer den Punkten C und D keinen dritten Punkt gemeinschaftlich haben können.

Anm. 2. Wenn man ganz gründlich verfahren will, so wird man in Hinsicht der Behauptung (3) auch noch zu zeigen haben, daß wirklich der eine Kreis theils innerhalb, theils außerhalb des andern liegt. Um dieses für den um B beschriebenen Kreis zu zeigen, nehmen wir zunächst auf dem Bogen CD, welcher die Centrallinie AB (Fig. 98, a) oder ihre über A fortgesetzte Verlängerung (Fig. 98, b) schneidet, einen beliebigen Punkt E an und verbinden ihn mit den Mittelpunkten A und B. Dann ist in den entstandenen Dreiecken ABE und ABC Seite AB = AB, BE = BC, aber Winkel ABE < ABC, also auch nach § 70 AE < AC; folglich liegt der Punkt E innerhalb des Kreises um A. — Nimmt man aber auf dem von C und D begrenzten Bogen, welcher die über B fortgesetzte Verlängerung der Centrallinie AB schneidet, einen beliebigen Punkt F an und verbindet denselben mit A und B, so ist Winkel ABF > ABC,

also auch nach § 70 AF > AC, und folglich liegt der Punkt F außerhalb des Kreises um A.

§ 150. Zusatz.

Da von den Behauptungen des vorherg. § allemal nur eine richtig sein kann, so gelten dieselben auch umgekehrt, nehmlich

1) wenn zwei Kreise sich von Außen berühren, so liegt der Berührungspunkt in der Centrallinie;

2) wenn zwei Kreise sich von Innen berühren, so liegt der Berührungspunkt auf der Verlängerung der Centrallinie; und

3) wenn zwei Kreise sich schneiden, so liegen die Durchschnittspunkte zu beiden Seiten der Centrallinie.

Bemerkung. Denken wir uns zwei Kreise so beschrieben, daß der eine ganz außerhalb des andern liegt, und hierauf den einen dem andern so genähert, daß sein Mittelpunkt die Centrallinie durchläuft, so werden wir die fünf Lagen zu unterscheiden haben, welche der folgende § behandelt.

§ 151. Lehrsatz.

1) Wenn ein Kreis ganz außerhalb des andern liegt, so ist die Centrallinie AB (Fig. 96) größer, als die Summe der Radien AC + BD (um das Stück CD).

2) Wenn zwei Kreise sich von Außen berühren, so ist die Centrallinie AB (Fig. 97) gleich der Summe der Radien AC + BC.

3) Wenn zwei Kreise sich schneiden, so ist die Centrallinie AB (Fig. 98, a u. b) kleiner, als die Summe der Radien AC + BC, aber größer, als der Unterschied der Radien AC — BC (§ 63 und 64).

4) Wenn zwei Kreise sich von Innen berühren, so ist die Centrallinie AB (Fig. 99) gleich dem Unterschiede der Radien AC — BC.

5) Wenn ein Kreis ganz innerhalb des andern liegt, so unterscheiden sich die beiden Radien AC und BD (Fig. 100) um AB + CD, folglich ist die Centrallinie AB kleiner, als der Unterschied der beiden Radien AC — BD (um CD).

§ 152. Zusatz.

Da durch die fünf Fälle des vorherg. § die Möglichkeit der verschiedenen Lagen, welche zwei Kreise in einer Ebene haben können, erschöpft ist, (ein sechster Fall nicht denkbar ist), und von jenen fünf Behauptungen nie zwei zugleich statt finden können, so

müssen sie sämmtlich auch umgekehrt gelten. — Wir beschränken uns hier darauf, die dritte, als die für das Folgende wichtigste, umgekehrt auszusprechen, also:

Zwei Kreise schneiden sich dann gewiß, wenn die Centrallinie kleiner, als die Summe, aber größer, als die Differenz der Radien ist.

Die Kreise können sich nehmlich nicht von Außen oder Innen berühren, weil sonst nach (2) und (4) des vorherg. § die Centrallinie gleich der Summe oder Differenz der Radien sein müßte, welches beides der Voraussetzung widerspricht; und es kann auch nicht der eine ganz außerhalb oder ganz innerhalb des andern liegen, weil sonst nach (1) und (5) des vorherg. § die Centrallinie entweder größer, als die Summe, oder kleiner, als die Differenz der Radien sein müßte, welches ebenfalls gegen die Voraussetzung streitet. Also bleibt nichts Anderes übrig, als daß sich die Kreise schneiden.

§ 153. Lehrsatz.

Wenn von drei Linien a, b und c eine a kleiner, als die Summe der beiden andern b + c, aber größer, als ihr Unterschied b — c gegeben ist, so ist es möglich, aus denselben ein Dreieck zu zeichnen (Fig. 46).

Beweis. Denn wenn ich um die Endpunkte von a (= DE) mit den Radien b und c Kreise beschreibe, so müssen sich diese zu Folge des vorherg. § durchschneiden. Der eine Durchschnittspunkt (F) mit den Endpunkten von a (D u. E) verbunden, liefert nach § 83 das verlangte Dreieck (DEF).

Anm. In diesem Satze sind die Bedingungen zu der in § 83 behandelten Aufgabe nachgetragen.

C. Aufgaben.

§ 154. Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis eine gegebene Linie als Sehne so einzutragen, daß der eine Endpunkt derselben in einen auf dem Kreise gegebenen Punkt fällt.

Aufl. Der auf dem Kreise gegebene Punkt sei A, die einzutragende Sehne α (Fig. 101). Man beschreibe um A mit α einen Kreis, welcher den gegebenen in den Punkten B und D schneidet, und verbinde einen derselben, z. B. B mit A, so ist AB die verlangte Sehne.

Bedingungen. Eben so gut könnte man auch A mit D verbinden. Die Aufgabe hat also im Allgemeinen zwei Auflösungen,

so lange nehmlich α kleiner ist, als der Durchmesser AE. Ist $\alpha =$ AE, so berühren sich die Kreise in E, und die Aufgabe hat nur eine Auflösung, nehmlich AE. Ist aber $\alpha >$ AE, so ist die Aufgabe gar nicht zu lösen.

§ 155. Aufgabe.

An einen Kreis durch einen auf der Peripherie gegebenen Punkt B (Fig. 80) eine Tangente zu ziehen.

Aufl. Man ziehe den Radius BC und durch B senkrecht auf BC die Linie AD, welches nach § 131, 1 die gesuchte Tangente ist.

§ 156. Aufgabe.

An einen gegebenen Kreis eine Tangente zu ziehen, welche einer gegebenen Linie AD (Fig. 84) parallel ist.

Aufl. Man fälle auf AD aus dem Mittelpunkte C die Senkrechte BC, welche den Kreis in F durchschneidet, und ziehe durch F mit AD die Parallele GH, welche die verlangte Tangente ist.

Beweis. Denn da GH || AD und AD $\perp$ BC gezogen ist, so ist nach § 47, 2 auch GH $\perp$ BC und folglich GH nach § 131, 1 eine Tangente.

Anm. Eine zweite Auflösung erhält man, wenn man CD über C verlängert, bis sie die Peripherie in H trifft und durch H eine Parallele mit AB zieht.

§ 157. Aufgabe.

An einen Kreis durch einen außerhalb gegebenen Punkt A (Fig. 83) eine Tangente zu ziehen.

Analysis. Denke ich mir AB als die gesuchte Tangente und verbinde den Mittelpunkt C mit A und B, so ist Winkel ABC ein Rechter. Demnach muß vermöge § 137, 5 der Punkt B auf einem Halbkreise liegen, dessen Durchmesser AC ist. Hieraus ergiebt sich folgende

Aufl. Ich verbinde A mit C, halbire AC in E und beschreibe um E mit AE einen Kreis, welcher den gegebenen Kreis in B und D durchschneidet. Einen dieser Punkte, z. B. B, verbinde ich mit A, so ist AB die gesuchte Tangente.

Beweis. Denn wenn ich BC ziehe, so ist Winkel ABC ein Rechter, als Winkel im Halbkreise; folglich berührt AB den Kreis, weil sie auf dem Radius BC senkrecht steht.

Anm. Eine zweite Tangente erhalte ich, wenn ich A mit D verbinde. Es lassen sich also aus jedem außerhalb des Kreises gegebenen Punkte zwei Tangenten an denselben ziehen.

§ 158. Aufgabe.

Von einem gegebenen Kreise einen Abschnitt abzuschneiden, welcher einen gegebenen Peripheriewinkel α (Fig. 75) faßt.

Aufl. Man zeichne in den Kreis einen Centriwinkel ACB $= 2\alpha$ und ziehe die Sehne AB; dann ist jeder Peripheriewinkel des entstandenen Abschnitts AFB nach § 136 gleich α.

Bemerkung. Bei der letzten Aufgabe sind der Radius und der Winkel des Kreisabschnitts gegeben; in § 154 waren der Radius und die Sehne gegeben; in der nun folgenden Aufgabe sind Sehne und Winkel gegeben und der Radius gesucht.

§ 159. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Linie AB (Fig. 102) als Sehne einen Kreisabschnitt zu zeichnen, welcher einen gegebenen Winkel faßt.

Die Analysis ist in § 139 enthalten.

Aufl. Man trage den gegebenen Winkel α in A an AB an, = BAD, halbire AB und errichte im Halbirungspunkt E auf AB und in A auf AD Lothe, welche sich in C durchschneiden; dann ist C der Mittelpunkt des gesuchten Abschnitts.

Beweis. Denn wenn ich C mit B verbinde, so ist △ ABC (nach § 81, 5) gleichschenklig, weil die Grundlinie AB zu Folge der Construction durch die Höhe CE halbirt ist, folglich AC = BC. Demnach geht ein mit AC um C beschriebener Kreis auch durch B, und AB ist also eine Sehne desselben. AD aber ist eine Tangente, weil sie nach der Construction auf AC senkrecht steht. Folglich ist jeder in den Abschnitt AFB gezeichnete Winkel $= \alpha$; denn der Winkel, welchen die Sehne und Tangente bilden, ist (nach § 139) dem Winkel im entgegengesetzten Abschnitte gleich.

D. Anhang.

Von geometrischen Oertern.

§ 160. Erklärung.

Wenn ein Punkt gesucht wird, welcher einer gewissen Bedingung Genüge leistet, und es giebt nicht bloß einen solchen Punkt (oder eine beschränkte Anzahl derselben), sondern es erfüllen alle Punkte einer geraden oder krummen Linie die aufgegebene Bedingung, während dieß von keinem Punkte außerhalb dieser Linie gilt, so sagt man auch: die Linie sei der geometrische Ort des Punktes, welcher der vorgeschriebenen Bedingung genügt.

So ist z. B. der geometrische Ort eines Punktes, welcher von einem gegebenen Punkte einen vorgeschriebenen Abstand hat, die mit diesem Abstande um den gegebenen Punkt beschriebene Kreislinie; — ferner der geometrische Ort eines Punktes, welcher von einer gegebenen geraden Linie einen vorgeschriebenen Abstand hat, eine mit derselben parallele gerade Linie; — weiter der geometrische Ort eines Punktes, welcher von den Endpunkten einer gegebenen geraden Linie gleichen Abstand hat, ein in der Mitte dieser Linie errichtetes Loth; — der geometrische Ort des Scheitelpunktes eines Winkels von vorgeschriebener Größe, dessen Schenkel durch die Endpunkte einer gegebenen geraden Linie gehen, ein über dieser Linie als Sehne beschriebener Kreisbogen u. dgl. m.

Anm. Die besondere Betrachtung der geometrischen Oerter ist für die Auflösung vieler Aufgaben sehr förderlich; ja streng genommen dürfte es nur wenige Aufgaben geben, deren Auflösung nicht auf geometrischen Oertern beruhte; so z. B. gleich die Auflösung der ersten Aufgabe, welche wir in diesem Lehrbuche behandelt haben (§ 83), ist durch Benutzung zweier geometrischen Oerter (zweier Kreise) erhalten worden.

Zur Erläuterung noch das folgende Beispiel:

§ 161. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem die Grundlinie α, die Höhe β und der Winkel an der Spitze γ gegeben sind (Fig. 103).

Analysis. Denken wir uns bereits die Grundlinie AB $= \alpha$ hingezeichnet, so fehlt uns allein noch die Spitze C. Für diese ist uns aber durch die Bedingungen der Aufgabe ein doppelter geometrischer Ort gegeben. Sie muß nehmlich erstens, da die Höhe des Dreiecks gegeben ist, auf einer mit AB in dem Abstande der Höhe parallel gezogenen Linie, und zweitens, weil der Winkel an der Spitze gegeben ist, auf einem über AB, als Sehne, beschriebenen Kreisbogen, welcher den gegebenen Winkel faßt, zu suchen sein; sie wird also da liegen, wo diese beiden Oerter sich durchschneiden. Hieraus ergiebt sich die folgende

Aufl. Man zeichne die gegebene Grundlinie AB $= \alpha$ hin, beschreibe über derselben, als Sehne, nach § 159 einen Kreisbogen, welcher den gegebenen Winkel γ faßt, errichte dann in einem beliebigen Punkte von AB, um des Folgenden Willen am bequemsten in der Mitte D, ein Loth, schneide von demselben die Höhe β = DE ab und ziehe durch den Endpunkt E mit AB eine Parallele, welche den vorher beschriebenen Bogen in zwei Punk-

ten C und G durchschneidet; endlich verbinde man einen von diesen Punkten, z. B. C, mit A und B, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Bedingungen. Die Höhe β darf nicht größer sein, als die Höhe DF des Abschnitts AFD; wäre β = DF, so würde man ein gleichschenkliges Dreieck erhalten.

Wenn man den Durchschnittspunkt G mit A und B verbindet, so entsteht ein zweites, aber mit ABC congruentes Dreieck ABG. Es ist nehmlich

AB = AB,
W. ACB = AGB nach § 137
und W. ABC = BAG, weil nach § 138 Bogen AC = BG ist,
folglich $\triangle$ ABC $\cong$ ABG nach § 68.

Die Aufgabe hat also, so lange nicht $\alpha >$ DF ist, eine Aufl.

Uebungsaufgaben.

A. Dreiecksaufgaben.

Aufgabe 120. In einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen.

Aufgabe 121—123. In einen gegebenen Kreis ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben ist:

121) die Grundlinie (zwei Aufl.);
122) der Winkel an der Spitze;
123) ein Winkel an der Grundlinie.

Aufgabe 124—137. In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

124) zwei Seiten (zwei Aufl.);
125) die Grundlinie und die Höhe (zwei Aufl.);
126) die Grundlinie und die Mittellinie, (die Linie von der Spitze nach der Mitte der Grundlinie gezogen);
127) der Winkel an der Spitze und die Höhe;
128) der Winkel an der Spitze und die Mittellinie;
129) die Grundlinie und ein Winkel an derselben (zwei Aufl.);
130) eine Seite und die Höhe (zwei Aufl.);
131) eine Seite und die Mittellinie (zwei Aufl.*);

*) Nachdem man die Seite als Sehne in den Kreis eingetragen hat, ergiebt sich für die Mitte der Grundlinie durch die gegebene Mittellinie und § 126, 1 ein doppelter geometrischer Ort.

132) zwei Winkel;

133) die beiden Abschnitte, in welche die Grundlinie durch die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze getheilt wird;

134) die Grundlinie und der Unterschied der Winkel an derselben;

135) Die Höhe und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie*);

136) die Höhe und der Unterschied der beiden Segmente**);

137) Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem der Radius des umschriebenen Kreises, die Mittellinie und der Unterschied der Segmente gegeben sind.

Aufgabe 138 — 148. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

138) die Grundlinie, der Winkel an der Spitze und die Mittellinie;

139) die beiden Segmente und der Winkel an der Spitze;

140) die Höhe, der Unterschied der beiden Segmente und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie;

141) die beiden Segmente und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie (zwei Aufl.);

142) der Winkel an der Spitze und die Abschnitte, in welche die Halbirungslinie desselben die Grundlinie theilt;

143) die Grundlinie und die beiden Winkel, welche die Mittellinie mit den beiden Seiten bildet;

144) die Mittellinie, ein Winkel an der Grundlinie und die gegenüberliegende Seite (zwei Aufl.);

145) die Mittellinie, der Winkel an der Spitze und eine Seite;

146) die Höhe, die Mittellinie und der Radius des um das Dreieck zu beschreibenden Kreises (zwei Aufl.);

147) die Grundlinie und die aus den Endpunkten derselben auf die Seiten gefällten Lothe (zwei Aufl.);

148) die Mittellinie und die aus den Endpunkten der Grundlinie auf die Seiten gefällten Lothe (zwei Aufl.);

Aufgabe 149. Um einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen.

Aufgabe 150—152. Um einen gegebenen Kreis ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben ist:

150) die Grundlinie;

151) die Höhe;

152) der Winkel an der Spitze.

Aufgabe 153—157. Um einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

153) zwei Winkel;

154) die Grundlinie und ein Winkel an derselben;

---

*) Man gelangt zur Auflösung dieser und der beiden folgenden Aufgaben, wenn man durch die Spitze des Dreiecks eine Sehne parallel mit der Grundlinie zieht.

**) Die beiden Abschnitte, in welche die Grundlinie durch die Höhe getheilt wird.

155) der Winkel an der Spitze und die Halbirungslinie desselben;

156) die Höhe und eine Seite (zwei Aufl.);

157) die Höhe und der Winkel an der Spitze*).

Aufgabe 158—160. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

158) die Höhe, die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze und der Radius des hinein zu beschreibenden Kreises;

159) die Höhe, der Unterschied der Winkel an der Grundlinie und der Radius des hinein zu beschreibenden Kreises;

160) die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze, der Unterschied der Winkel an der Grundlinie und der Radius des hinein zu beschreibenden Kreises.

Aufgabe 161 — 162. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

161) der Umfang, die Höhe und der Winkel an der Spitze;

162) die Grundlinie, der Winkel an der Spitze und der Radius des in das Dreieck zu beschreibenden Kreises.

B. Vierecksaufgaben.

Aufgabe 163—165. Ein Viereck zu zeichnen, von welchem gegeben sind (Fig. 67) zwei Seiten (a u. d), der eingeschlossene Winkel (A) und

163) der gegenüberliegende Winkel (C) und die beide gegebenen Winkel verbindende Diagonale (e) (zwei Aufl.);

164) der gegenüberliegende Winkel (C) und der Winkel, welchen die Diagonalen einschließen.

165) die beiden Winkel (ACB u. ACD), welche die nicht gegebenen Seiten mit der aus der Spitze des gegebenen Winkels gezogenen Diagonale (e) bilden.**)

Aufgabe 166—168. Ein Viereck zu zeichnen, von welchem gegeben sind (Fig. 67) eine Diagonale (f), die ihr gegenüberliegenden Winkel (A und C) und

166) der Winkel, welchen die Diagonalen einschließen, und eine Seite a (zwei Aufl.);

167) zwei mit der gegebenen Diagonale in eine Ecke zusammenstoßende Seiten a und b (vier Aufl.);

168) Zwei einander gegenüberliegende Seiten A und C (vier Aufl.)

Aufgabe 169—171.***) Ein Viereck zu zeichnen, von wel-

---

*) Die Auflösung dieser und der drei folgenden Aufgaben wird erhalten, wenn man durch den Mittelpunkt eine Parallele zur Grundlinie zieht.

**) Diese Aufgabe ist in der Feldmeßkunst unter dem Namen der Pothenotischen bekannt.

***) Wenn man durch die Endpunkte einer Diagonale f zwei Linien parallel und gleich mit der andern Diagonale e zieht und die Endpunkte dieser Linien verbindet, so entsteht ein Parallelogramm, dessen Betrachtung leicht zu der Auflösung dieser Aufgaben hinführt.

chem gegeben sind (Fig. 67) die beiden Diagonalen (e u. f), der von denselben eingeschlossene Winkel und

169) zwei einander gegenüberliegende Seiten a u. c (zwei Aufl.);

*169) eine Seite a und ein dieser Seite nicht anliegender Winkel C (zwei Aufl.);

170) zwei einander gegenüberliegende Winkel A und C (zwei Aufl.);

171) zwei an einer Seite liegende Winkel A und B (zwei Aufl.);

Aufgabe 172—175. Ein Viereck zu zeichnen, um welches sich ein Kreis beschreiben läßt, wenn gegeben sind (Fig. 67)

172) drei Seiten (a, b u. c) und ein von denselben eingeschlossener Winkel (B) (zwei Aufl.);

173) drei Seiten (a, b u. c) und ein von denselben nicht eingeschlossener Winkel (A) (zwei Aufl.);

174) zwei gegenüberstehende Seiten (a u. c) und die Winkel (BAC u. ACD), welche sie mit einer Diagonale bilden;

175) die beiden Diagonalen e und f, der von denselben eingeschlossene Winkel und ein Winkel ABD, welchen eine Seite mit einer Diagonale bildet.

Aufgabe 176—179. In einen gegebenen Kreis ein Viereck zu zeichnen, von welchem gegeben sind (Fig. 67):

176) drei von den Winkeln, welche eine Diagonale mit den Seiten bildet (z. B. Winkel BAC, DAC u. ACB);

177) eine Seite (a) und die Winkel (ACD u. BDC), welche die gegenüberliegende Seite (c) mit den Diagonalen bildet (zwei Aufl.);

178) der Winkel, welchen die Diagonalen einschließen, und die Winkel (BAC u. ACB), welche eine Diagonale (e) mit zwei zusammenstoßenden Seiten bildet;

179) beide Diagonalen (e u. f) und der von denselben eingeschlossene Winkel.

Aufgabe 180—181. Um einen gegebenen Kreis ein Viereck zu zeichnen, von welchem gegeben sind (Fig. 67):

180) drei Winkel (A, B u. C);

181) eine Seite (a) und zwei einander gegenüberliegende Winkel (A u. C).

Aufgabe 182. Um einen gegebenen Kreis ein Trapez zu zeichnen, von welchem die beiden nicht parallelen Seiten gegeben sind.

Aufgabe 183. Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu zeichnen, von welchem eine Seite gegeben ist.

Aufgabe 184—186. Ein Viereck zu zeichnen, in welches sich ein Kreis beschreiben läßt, wenn von demselben gegeben sind (Fig. 67):

184) zwei zusammenstoßende Seiten (a u. b) und die der einen anliegenden Winkel (A u. B);

185) eine Seite (a) und drei Winkel (A, B u. C);

186) drei Seiten (a, b, c) und ein Winkel (A).

C. Kreisaufgaben.

Aufgabe 187—192. Einen Kreis zu zeichnen, welcher

187) durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Linie in einem gegebenen Punkte berührt;

188) durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt (zwei Aufl., je nachdem äußere oder innere Berührung stattfinden soll);

189) zwei sich schneidende Linien berührt und zwar die eine derselben in einem gegebenen Punkte;

190) eine Linie und einen Kreis und zwar den Kreis in einem gegebenen Punkte;

191) eine Linie und einen Kreis und zwar die Linie in einem gegebenen Punkte;

192) zwei Kreise und zwar den einen in einem gegebenen Punkte.

Aufgabe 193—201.*) Diejenige gerade oder krumme Linie zu bestimmen, in welcher die Mittelpunkte aller der Kreise liegen, welche einen gegebenen Radius haben und

193) durch einen gegebenen Punkt gehen;

194) eine gegebene Linie berühren;

195) einen gegebenen Kreis von Außen berühren;

196) einen gegebenen Kreis einschließend berühren;

197) von einer der Lage nach gegebenen Linie eine Sehne von vorgeschriebener Länge abschneiden;

198) eine der Lage nach gegebene Linie unter einem gegebenen Winkel schneiden, (d. h. daß die durch den Durchschnittspunkt gezogene Tangente mit der gegebenen Linie einen vorgeschriebenen Winkel bildet);

199) eine gegebene Kreislinie halbiren;

200) eine gegebene Kreislinie so durchschneiden, daß die beiden gemeinschaftliche Sehne einer gegebenen Linie gleich wird;

201) eine gegebene Kreislinie unter einem gegebenen Winkel durchschneiden, (d. h. daß die am Durchschnittspunkte gezogenen Tangenten einen gegebenen Winkel einschließen).

D. Vermischte Aufgaben.

Aufgabe 202—208. Durch die eine Ecke C eines Dreiecks ABC eine die Grundlinie AB nicht schneidende Linie so zu ziehen, daß wenn man aus den beiden andern Ecken A und B auf die gesuchte Linie Lothe fällt, welche dieselbe in den Punkten X und Y treffen,

202) AX = BY wird;

203) AX = 2BY wird**).

---

*) Wenn man diese 9 unbestimmten Aufgaben zu je zweien mit verstatteter Wiederholung combinirt, so erhält man 45 bestimmte Aufgaben.

**) Die Aufgaben 202, 203 und 206 erfordern die Anwendung der Sätze vom Kreise nicht.

204) AX — BY einer gegebenen Linie gleich wird;
205) AX + BY einer gegebenen Linie gleich wird;
206) CX = CY wird;
207) CX + CY einer gegebenen Linie gleich wird;
208) CY — CX einer gegebenen Linie gleich wird.

Aufgabe 209 — 215. Dieselben Aufgaben, jedoch mit der Abänderung, daß die gesuchte Linie AB durchschneiden soll.

Aufgabe 216. In einen gegebenen Kreis eine Sehne von vorgeschriebener Länge so einzutragen, daß sie einer gegebenen Linie parallel wird. (2 Aufl.)

Aufgabe *216. In einem gegebenen Kreise eine Sehne so zu ziehen, daß sie einer gegebenen Linie parallel wird und den Kreis unter einem gegebenen Winkel durchschneidet.

Aufgabe 217—219. Es ist ein Kreis und innerhalb desselben ein Punkt P gegeben; es soll durch diesen Punkt eine Sehne XY so gegeben werden, daß

217) die Sehne XY in dem gegebenen Punkte P halbirt ist;
218) daß die Sehne XY einer gegebenen Linie gleich wird (zwei Aufl.);
219) daß der Unterschied der beiden Abschnitte der Sehne PX — PY einer gegebenen Linie gleich wird (zwei Aufl.).

Aufgabe 220 — 222. Es ist ein Kreis und außerhalb desselben ein Punkt P gegeben; es soll durch diesen Punkt eine Linie, welche den Kreis zuerst im Punkte X und zum zweiten Male in Y durchschneidet, so gezogen werden, daß

220) die Sehne XY einer gegebenen Linie gleich wird (zwei Aufl.);
221) daß PX = XY wird (zwei Aufl.);
222) daß PX + PY einer gegebenen Linie gleich wird (zwei Aufl.).

Aufgabe 223—226. Es ist eine Linie und ein Kreis gegeben; es soll zwischen dem Kreise und der Linie eine Linie von vorgeschriebener Länge so gezogen werden, daß sie

223) einer gegebenen Linie parallel wird (zwei Aufl.);
224) den gegebenen Kreis berührt (vier Aufl.);
225) unter einem gegebenen Winkel schneidet (vier Aufl.);
226) so durchschneidet, daß die entstandene Sehne eine vorgeschriebene Länge hat (vier Aufl.).

Aufgabe 227 — 229. Es sind zwei Kreise gegeben; es soll zwischen denselben eine Linie so gezogen werden, daß sie

227) beide Kreise berührt (vier Aufl.);
228) den einen berührt und den andern unter einem gegebenen Winkel durchschneidet (vier Aufl.);
229) den einen berührt und innerhalb des andern eine Sehne von vorgeschriebener Länge entsteht (vier Aufl.); u. dgl. m.

Aufgabe 230. In einen gegebenen Kreisausschnitt einen Kreis zu zeichnen, welcher beide Radien und den Bogen des Ausschnitts berührt.

Aufgabe 231. Um die Ecken eines Dreiecks drei sich von Außen berührende Kreise zu beschreiben.

Aufgabe 232. In ein gleichseitiges Dreieck drei Kreise zu zeichnen, von denen jeder die beiden andern Kreise von Außen und zwei Seiten des Dreiecks berührt.

Neunter Abschnitt.

Von der Gleichheit der Figuren.

Bemerkung. Linien und Winkel lassen sich nur in Hinsicht ihrer Größe mit einander vergleichen. Zwei Linien oder zwei Winkel sind entweder gleich oder ungleich. Figuren können außer in Hinsicht auf ihre Größe, auch in Hinsicht ihrer Gestalt verglichen werden. Zwei Figuren, welche in der Größe übereinstimmen, heißen gleich; stimmen sie in der Gestalt überein, so heißen sie ähnlich. Stimmen zwei Figuren in Gestalt und Größe, also vollständig mit einander überein, so heißen sie congruent. Linien und Winkel sind schon dann congruent, wenn sie gleiche Größe haben; Figuren können einerlei Größe haben bei verschiedener Gestalt, sie können also einander gleich sein, ohne congruent zu sein. Eben so können zwei Figuren dieselbe Gestalt bei sehr verschiedener Größe haben; alle Quadrate haben dieselbe Gestalt, aber keineswegs dieselbe Größe. Alle Quadrate sind also ähnlich, aber sie sind nicht alle gleich.

Während in dem vorhergehenden Abschnitte nur von der vollständigen Uebereinstimmung in Gestalt und Größe, also von der Congruenz (oder Nichtcongruenz) die Rede gewesen ist, behandelt der nächste Abschnitt die Gleichheit, unberücksichtigt lassend die Gestalt, und der folgende die Aehnlichkeit, unberücksichtigt lassend die Größe.

§ 162. Erklärung.

Zwei Figuren heißen gleich, wenn sie sich in dieselben congruenten Stücke zerschneiden lassen.

Zwei Figuren sind daher auch dann gewiß gleich, wenn ein und dieselbe dritte Figur in beiden gleich vielmal enthalten ist.

Eine Figur ist **größer**, als die andere, wenn die letztere einem Theile der erstern gleich ist.

Anm. 1. Wenn $\alpha \cong$ a und $\beta \cong$ b ist (Fig. 104), so ist $\triangle$ ABC **gleich**, aber **nicht congruent** dem Vierecke DEFG. Das Quadrat α (Fig. 105) ist so wohl in dem Quadrate ABCD, als auch in dem Rechtecke EFGH viermal enthalten, folglich ist das Quadrat ABCD gleich dem Rechtecke EFGH; denn sie bestehen ja in der That aus den nehmlichen congruenten Stücken.

Anm. 2. Es können aber auch zwei Figuren, z. B. ein Kreis und ein Dreieck, einander gleich sein, ohne daß es möglich ist, dieselben in congruente Stücke zu zerschneiden, so wie ich mir die Quadratwurzel aus 2 wohl denken kann, obschon ich nicht im Stande bin, dieselbe wirklich anzugeben. Wenn eine geradlinige und eine krummlinige Figur einander als gleich erwiesen werden, sei es nun durch die höhere Analysis oder nach der Methode der Alten, so geschieht dieß doch nie anders, als daß man sich beide in unendlich viele und unendlich kleine Stücke zerschnitten denkt und zeigt, daß die Stücke der einen Figur denen der andern congruent sind (vergl. §. 167, 2), wie auch immer das hier offen Ausgesprochene umschrieben und eingekleidet werden mag.

§ 163. Lehrsatz.

Parallelogramme mit gleicher Höhe und Grundlinie sind gleich.

Beweis. Ich denke mir die Parallelogramme so zusammengelegt, daß ihre gleichen Grundlinien sich decken, dann werden die gegenüberstehenden Seiten, da die Parallelogramme gleiche Höhe haben, nach §. 105, 3 in eine gerade Linie fallen. In diese Lage gebracht seien die gegebenen Parallelogramme ABCD und ABEF (Fig. 106), deren Gleichheit ich nun erweisen will. — Ich kann zunächst zwei Dreiecke als congruent erweisen, nehmlich ADF und BCE, weil sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, nehmlich

$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ AF = BE \end{array}\right\} \text{als gegenüberst. Seiten in Prlgrmen.,}$$

W. DAF = CBE, als Winkel mit parallelen Schenkeln,

folglich $\triangle$ DAF $\cong$ CBE nach §. 66.

Ziehe ich nun von dem ganzen Trapeze ABED das Dreieck DAF ab, so bleibt das Parallelogramm ABEF übrig, und wenn ich von demselben Trapeze ABED das Dreieck BCE abziehe, so bleibt Parallelogramm ABCD übrig. Da ich Gleiches von Gleichem abgezogen habe, so muß auch Gleiches übrig bleiben; folglich ist Parallelogramm ABCD = ABEF.

Anm. Daß das längere Parallelogramm ABEF doch nur die

Größe von ABCD hat, erklärt sich daraus, daß ABCD in demselben Verhältnisse breiter ist, als ABEF länger ist.

§ 164. Lehrsatz.

Das Dreieck (ABC Fig. 107) ist halb so groß, als ein Parallelogramm (DEFG), welches mit ihm gleiche Höhe und Grundlinie hat.

Beweis. Denn wenn ich das Dreieck ABC zum Parallelogramm vervollständige, indem ich durch C eine Parallele mit AB und durch B eine Parallele mit AC ziehe, so ist das entstandene Parallelogramm ABHC nach § 102 doppelt so groß, als das Dreieck ABC und nach dem letzten § gerade so groß, als das Parallelogramm DEFG, weil es mit ihm gleiche Höhe und Grundlinie hat. Demnach ist auch Dreieck ABC halb so groß, als Parallelogramm DEFG.

§ 165. Zusatz.

1) Dreiecke mit gleicher Höhe und Grundlinie sind gleich. Denn sie sind zu Folge des vorherg. § die Hälften gleicher Parallelogramme.

2) Jedes Dreieck ABC (Fig. 108) ist gleich einem Parallelogramme ADEC, welches dieselbe Höhe, aber nur die halbe Grundlinie hat. — Denn beide sind die Hälfte des Parallelogr. ABGC.

3) Jedes Dreieck ABC (Fig. 109) ist gleich einem Parallelogramme ABDE, welches dieselbe Grundlinie, aber nur die halbe Höhe hat. — Denn beide sind Hälften des nehmlichen Parallelogramms ABFC.

Anm. Auch sieht man leicht, daß △ ABC und ▱ ADEC in Fig. 108 und △ ABC und ▱ ABDE in Fig. 109 aus denselben congruenten Stücken bestehen.

§ 166. Lehrsatz.

Jedes Trapez ist einem Parallelogramme gleich, welches die Höhe des Trapezes zur Höhe und die mittlere Länge des Trapezes zur Grundlinie hat.

Beweis. Das Trapez ABCD (Fig. 62) und das Parallelogramm AHGD haben das Fünfeck AHFCD gemeinschaftlich, und die nicht gemeinschaftlichen Dreiecke BFH und CFG sind schon in § 109 als congruent erwiesen. Folglich ist das Trapez ABCD gleich dem Parallelogramme AHGD.

§ 167. Lehrsatz.

1) Das regelmäßige Vieleck ist einem Dreiecke gleich, welches den Umfang des Vielecks zur Grundlinie und den Abstand des Mittelpunktes von einer Polygonseite zur Höhe hat.

2) Der Kreis ist einem Dreieck gleich, welches die Peripherie zur Grundlinie und den Radius zur Höhe hat.

Beweis. 1) Um das regelmäßige Vieleck ABCDEF (Fig. 110) in ein Dreieck zu verwandeln, schneide ich von dem einen Schenkel eines rechten Winkels KHR den Abstand des Mittelpunktes M von einer Polygonseite, MG = KH, und von dem andern Schenkel die Seiten des Vielecks, AB, BC, CD u. s. w. gleich mit HL, LN, NO u. s. w. nach der Reihe ab, verbinde den letzten Endpunkt R mit K und behaupte, daß das entstandene Dreieck KHR gleich dem regelmäßigen Vielecke ABCDEF ist. — Denn wenn ich in dem Vielecke den Mittelpunkt M mit sämmtlichen Ecken A, B, C... und in dem Dreiecke KHR die Spitze K mit sämmtlichen Theilungspunkten der Grundlinie L, N, O ... verbinde, so werden beide Figuren in gleich viele Dreiecke zerschnitten, und die Dreiecke in der einen Figur sind denen in der andern gleich, weil sie gleiche Höhe und gleiche Grundlinie haben. Demnach ist das regelmäßige Vieleck ABCDEF gleich dem Dreiecke KHR, welches den Umfang des Vielecks zur Grundlinie und den Abstand des Mittelpunkts von der Polygonseite zur Höhe hat.

2) Je größer die Anzahl der Seiten eines regelmäßigen Vielecks ist, um so mehr nähert sich dasselbe dem Kreise. Denkt man sich nun den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten, so geht der Umfang des Vielecks in die Peripherie und der Abstand einer Polygonseite vom Mittelpunkte in den Radius des Kreises über, woraus die Richtigkeit der obigen Behauptung (2) hervorgeht.

§ 168. Lehrsatz.

Wenn man in einem Parallelogramme ABCD (Fig. 111) eine Diagonale AC zieht, in derselben einen beliebigen Punkt E annimmt und durch diesen mit den Seiten des Parallelogrammes die Parallelen FG und HK zieht, so sind die beiden entstandenen Parallelogramme FEHD und EKBG, durch welche die Diagonale nicht geht, einander gleich. — Man nennt diese beiden Parallelogramme die Complemente.

Beweis. Da jedes Parallelogramm durch die Diagonale halbirt wird, so ist $\triangle$ ACD = ABC,

$\triangle \alpha = \beta$,

$\triangle \gamma = \delta$,

folglich wenn wir α u. γ von ACD und β u. δ von ABC subtrahiren, Prlgrm. FEHD = EKBG.

§ 169. Der pythagoräische Lehrsatz.

Wenn man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ABC (Fig. 112) Quadrate zeichnet, so ist das über der Hypotenuse verzeichnete Quadrat BCDE so groß, als die Quadrate über den Catheten ABFG und ACHK zusammen genommen.

Beweis. Man fälle aus der Spitze A des rechten Winkels CAB ein Loth AL auf die Hypotenuse BC und verlängere dasselbe, bis es DE in M schneidet; dann wird das Quadrat BCDE in zwei Rechtecke BLME und CLMD zerschnitten, von denen das erstere gleich dem Quadrate ABFG, und das letztere gleich dem Quadrate ACHK ist. Um zunächst zu zeigen, daß ABFG = BLME ist, ziehe man die Hilfslinien AE und CF, so entstehen zwei Dreiecke ABE und FBC, welche congruent sind, weil sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen; es ist nehmlich Winkel ABE = $90^0 + \alpha$ und CBF auch = $90^0 + \alpha$,

folglich W. ABE = CBF,

ferner S. AB = BF, als Seiten des Quadrats ABFG

S. BE = BC, " " " " BCDE;

folglich $\triangle$ ABE $\cong$ CBF.

Das Dreieck ABE ist die Hälfte des Rechtecks BLME, weil es mit ihm gleiche Grundlinie BE und gleiche Höhe BL hat; und das Dreieck CBF ist die Hälfte vom Quadrate ABFG, weil es mit ihm gleiche Grundline BF und gleiche Höhe AB hat. Da wir nun die Hälften ($\triangle$ ABE u. CBF) als gleich erwiesen haben, so müssen auch die Ganzen gleich sein. Also ist das Rechteck BLME gleich dem Quadrate ABFG.

Eben so läßt sich zeigen, daß das Rechteck CLMD gleich dem Quadrate ACHK ist, indem man die Hilfslinien AD u. BH zieht.

Da nun das Quadrat BCDE aus den beiden Rechtecken BLME und CLMD besteht, welche gleich den Quadraten ABFG u. ACHK erwiesen sind, so ist folglich das Quadrat BCDE so groß

als die beiden Quadrate ABFG und ACHK zusammen genommen, w. z. b. w.*)

Anm. Der pythagoräische Lehrsatz ist darum so wichtig, weil auf ihm die ganze rechnende Geometrie, also zunächst die Trigonometrie beruht. Ohne diesen Satz würde eine so wichtige mathematische Disciplin, wie die Trigonometrie, gar nicht existiren.

§ 170. Zusatz.

Im Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes haben wir gesehen, daß das Rechteck BLME (Fig. 112) gleich dem Quadrate ABFG ist. In dem Rechtecke BLME ist eine Seite BE gleich der Hypotenuse BC und die andere Seite BL ist einer von den Abschnitten, in welche die Hypotenuse durch das aus der Spitze des rechten Winkels gefällte Loth AL getheilt wird, und zwar ist BL derjenige Abschnitt, welcher an der Cathete AB liegt, deren Quadrat ABFG gleich dem Rechtecke BLME ist. Demnach können wir folgenden Satz aufstellen:

Wenn man in einem rechtwinkligen Dreiecke aus der Spitze des rechten Winkels ein Loth auf die Hypotenuse fällt, so ist das Quadrat einer Cathete so groß, als das Rechteck aus der ganzen Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitte.

§ 171. Lehrsatz.

Wenn man in einem rechtwinkligen Dreiecke ABC (Fig. 113) aus der Spitze C des rechten Winkels ACB ein Loth CD auf die Hypotenuse AB fällt, über dem Lothe CD ein Quadrat CDEF zeichnet und aus den beiden Abschnitten der Hypotenuse AD und

---

*) Wie wir den vorstehenden Lehrsatz hier vorgetragen haben, erscheint derselbe als ein merkwürdiges Kunststück, zwar bewundernswerth und äußerst künstlich, aber ohne irgend wie Aufschluß darüber zu geben, auf welchem Wege wohl der menschliche Geist zur Entdeckung dieses sonderbaren Satzes gelangt sein dürfte. Soll aber der mathematische Unterricht den Nutzen gewähren, dessen er fähig ist, so müssen die Wahrheiten der Mathematik nicht als Staunen erregende Kunststücke, sondern in einem natürlichen Verbande, nehmlich so vorgetragen werden, daß jeder folgende Satz als ein Fortschritt in der durch die vorhergehenden Sätze gegebenen Richtung erscheint, als die Beantwortung einer Frage, welche sich aus der Erkenntniß des Vorangehenden jedem denkenden Kopfe von selbst aufdrängt. Da aber der so eben vorgetragene Lehrsatz eines solchen Zusammenhanges mit den ihm vorangehenden Sätzen offenbar entbehrt, so scheint er in einem für den Unterricht bestimmten Lehrbuche hier nicht an der rechten Stelle zu stehen, und wirklich hat er diesen Platz nur hergebrachter Weise erhalten. Auf eine einfache und natürliche Weise geht derselbe aus den Sätzen von der Aehnlichkeit der Dreiecke hervor.

DB ein Rechteck BDGH bildet, so ist das Quadrat CDEF gleich dem Rechtecke BDGH.

Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich leicht aus den beiden vorhergehenden Sätzen, wenn man noch über AC ein Quadrat ACKL zeichnet und aus AD und DG das Quadrat ADGM vollendet. Wendet man nun zunächst den pythagoräischen Lehrsatz auf das rechtwinklige Dreieck ADC an, so erhält man

1) ACKL = ADGM + CDEF.

Zu Folge des vorhergehenden Satzes ist aber auch das Quadrat ACKL gleich dem Rechteck ABHM, welches zur einen Seite die ganze Hypotenuse AB und zur andern Seite den anliegenden Abschnitt AD (= DG = AM) hat. Demnach ist also auch

2) ACKL = ABHM = ADGM + BDGH.

Lassen wir nun in (1) und (2) auf beiden Seiten das gemeinschaftliche Stück ADGM weg, so bleibt

3) CDEF = BDGH.

D. h. das Quadrat des auf die Hypotenuse gefällten Lothes ist gleich dem Rechtecke aus den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

§ 172. Erklärung.

Eine Figur in eine andere verwandeln heißt eine derselben gleiche Figur zeichnen.

§ 173. Aufgabe.

Ein gegebenes Viereck ABCD (Fig. 114) in ein Dreieck zu verwandeln, so daß eine Seite AD und ein Winkel A ungeändert bleiben.

Aufl. Man ziehe die Diagonale BD und mit derselben durch C eine Parallele, welche die verlängerte AB in E schneidet, verbinde endlich D mit E, so ist ADE das verlangte Dreieck.

Beweis. Denn das Viereck ABCD und das Dreieck ADE haben das Dreieck ABD gemeinschaftlich und die nicht gemeinschaftlichen Dreiecke BDC und BDE sind gleich, weil sie dieselbe Grundlinie BD haben und zwischen den Parallelen BD u. CE liegen, also auch gleiche Höhe haben. Folglich ist auch, wenn ich Gleiches zu Gleichem addire, Viereck ABCD = Dreieck ADE.

§ 174. Aufgabe.

Ein Vieleck in ein anderes zu verwandeln, welches eine Ecke weniger hat.

Aufl. Das gegebene Vieleck sei ABCDEF (Fig. 115). Man schneide von demselben durch eine Diagonale BD ein Dreieck BCD ab, ziehe durch C mit BD eine Parallele, welche die verlängerte Seite AB in G schneidet, und verbinde D mit G, dann ist das entstandene Dreieck BGD = BCD, weil beide dieselbe Grundlinie BD haben und zwischen den Parallelen BD und CG liegen, also auch gleiche Höhe haben. Wenn wir nun zu den beiden gleichen Dreiecken BGD und BCD Vieleck ABDEF addiren, so ergiebt sich Vieleck AGDEF = ABCDEF. — Das erstere hat aber eine Ecke weniger, als das letztere, weil AB und BG eine gerade Linie bilden.

§ 175. Aufgabe.

Ein beliebiges Vieleck, z. B. ein Siebeneck, in ein Dreieck zu verwandeln.

Aufl. Man verwandle mit Hilfe des vorherg. § das Siebeneck zuerst in ein Sechseck, dieses hierauf in ein Fünfeck, das Fünfeck in ein Viereck und endlich das Viereck in ein Dreieck. — Welches aber auch immer die Zahl der Seiten eines Vielecks sein mag, so wird man mit Hilfe des vorherg. § doch immer leicht im Stande sein, dasselbe in ein Dreieck zu verwandeln.

§ 176. Aufgabe.

Ein Dreieck in ein Rechteck zu verwandeln.

Aufl. Das gegebene Dreieck sei ABC (Fig. 116); man halbire die Grundlinie AB in D, errichte auf derselben in A u. D Lothe und ziehe durch C eine Parallele mit der Grundlinie, welche die Lothe in F und E schneidet; dann ist das entstandene Rechteck ADEF = △ ABC, weil es dieselbe Höhe und die halbe Grundlinie hat.

§ 177. Aufgabe.

Ein Rechteck BDGH (Fig. 113) in ein Quadrat zu verwandeln.

Die Analysis ist in § 171 enthalten.

Aufl. Man verlängere die Seite BD und mache die Verlängerung AD gleich der andern Seite DG, halbire hierauf AB in E und beschreibe um E über AB einen Halbkreis, errichte dann in D ein Loth, welches den Halbkreis in C trifft, und zeichne endlich über CD ein Quadrat CDEF, welches das verlangte ist.

Beweis. Denn wenn man AC u. BC zieht, so ist Winkel ACB ein rechter, als Winkel im Halbkreise, folglich das über dem

Lothe CD gezeichnete Quadrat CDEF gleich dem Rechtecke BDGH, welches die beiden Abschnitte der Hypotenuse BD und AD (= DG) zu Seiten hat.

Anm. Eine andere Auflösung ergiebt sich aus § 170.

§ 178. Aufgabe.

Ein beliebiges Vieleck in ein Quadrat zu verwandeln.

Aufl. Man verwandle das Vieleck zuerst nach § 175 in ein Dreieck, dieses nach § 176 in ein Rechteck und endlich nach dem letzten § das Rechteck in ein Quadrat.

§ 179. Aufgabe.

Ein Quadrat zu zeichnen, welches der Summe oder dem Unterschiede zweier gegebenen Quadrate gleich ist.

Die Auflösungen sind in § 169 enthalten.

Uebungsaufgaben.

Aufgabe 233—236. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, so daß die Grundlinie ungeändert bleibt und das zu zeichnende Dreieck

233) gleichschenklig wird;

234) an der Grundlinie einen Winkel von vorgeschriebener Größe hat;

235) eine gegebene Linie zur Seite hat (zwei Aufl.);

236) einen gegebenen Winkel zum Winkel an der Spitze hat.

Aufgabe 237—238. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, so daß ein Winkel an der Grundlinie bleibt, und

237) die Grundlinie einer gegebenen Linie gleich wird;

238) die Höhe einer gegebenen Linie gleich wird.

Aufgabe 239—240. Dieselben Aufgaben für das Parallelogramm.

Aufgabe 241—242. Ein Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, so daß

241) eine Seite einer gegebenen Linie gleich wird *);

242) der Umfang des Rechtecks einer gegebenen Linie gleich wird.

Aufgabe 243—246. Es ist ein Quadrat gegeben; man soll ein Quadrat zeichnen, welches

243) doppelt so groß ist;

244) halb so groß ist;

245) dreimal so groß ist;

246) fünfmal so groß ist, als das gegebene Quadrat u. dgl. m.

*) Diese Aufgabe läßt besonders viele verschiedene Auflösungen zu, z. B. bei Benutzung von § 168, 170, 171 u. a. m.

Aufgabe 247. Ein gegebenes Dreieck in ein rechtwinkliges Dreieck mit einer gegebenen Hypotenuse zu verwandeln.

Aufgabe 248. Ein Dreieck in ein anderes mit einer gegebenen Grundlinie und einem gegebenen Winkel an der Spitze zu verwandeln.

Aufgabe 249. In einen gegebenen Kreis ein Rechteck zu zeichnen, welches einem gegebenen Quadrate gleich ist.

Aufgabe 250. Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu zeichnen, welcher einem gegebenen Quadrate gleich ist.

Bemerkung. Alle Untersuchungen, welche wir in den vorhergehenden Abschnitten über räumliche Größen: Linien, Winkel und Figuren, angestellt haben, beschäftigen sich mit der einfachen Frage, ob zwei Größen gleich oder ungleich sind. Der erste Fall bietet keine Mannigfaltigkeit dar. Wenn das eine Mal die Größe $A = B$ und ein anderes Mal $C = D$ gegeben ist, so findet zwischen A und B gerade dieselbe Beziehung statt, wie zwischen C und D. Wenn dagegen $A > B$ und $C > D$ gegeben ist, so ist hiermit noch keineswegs ausgesagt, daß zwischen A und B gerade die nehmliche Verschiedenheit stattfindet, wie zwischen C und D; es ist möglich, daß die Größe A die Größe B eben so oft, als die Größe C die Größe D enthält; es kann aber auch eine solche Gleichheit der beiderseitigen Verhältnisse nicht vorhanden sein.

Da jedes Verhältniß durch zwei Zahlen bestimmt wird, so gehört das Verhältniß selbst (seinem Zahlenwerthe nach) der Arithmetik an und kann keinen Gegenstand der Geometrie bilden. Die Geometrie kann aber wohl wieder das Verhältniß zweier räumlichen Größen mit dem zweier andern in so fern vergleichen, als sie untersucht, ob das Verhältniß des einen Paares dem des andern Paares gleich sei oder nicht, z. B. ob zwei Kreisbogen sich sich wie die zugehörigen Centriwinkel verhalten oder nicht. Durch diese Vergleichung entsteht die Proportion. Zu jeder Proportion gehören aber zwei Verhältnisse, also vier räumliche Größen; in der Proportion werden auf einmal (in einer bestimmten Beziehung) vier räumliche Größen mit einander verglichen. Wir werden es daher im Folgenden mit einer bei Weitem weniger einfachen Vergleichung der räumlichen Größen zu thun haben, als in den vorhergehenden Abschnitten.

Die Sätze von der Proportionalität der räumichen Größen zerfallen aber von selbst wieder in zwei Abschnitte, je nach-

dem sie bloß Linien oder Linien und (begränzte) Flächen betreffen.

Zehnter Abschnitt.

Von den Verhältnissen der Linien.

A. Arithmetische Hilfssätze.

§ 180. Bemerkung.

Diejenigen Sätze der Arithmetik und allgemeinen Größenlehre, welche für das richtige Verständniß dieses und des folgenden Abschnittes unentbehrlich sind und hier als bekannt vorausgesetzt werden, sind folgende:

1. Erklärung. Eine Größe durch eine andere messen, heißt untersuchen, wie oft die eine in der andern enthalten ist. Die Größe, mit welcher man mißt, heißt die Einheit oder das Maaß, und die ganze oder gebrochene Zahl, welche durch das Messen gefunden wird, welche also anzeigt, wie oft die Einheit in der zu messenden Größe enthalten ist, wird die Maaßzahl genannt.

2. Erklärung. Wenn man zwei gleichartige Größen, z. B. die Linien A und B (Fig. 117), durch eine dritte C gemessen und so die Maaßzahlen 5 und 3 gefunden hat, so sagt man: die Größen A und B verhalten sich wie ihre Maaßzahlen 5 und 3 und drückt dieses in Zeichen so aus:

$$A : B = 5 : 3.$$

Umgekehrt, wenn man sagt, daß sich die Größe A zu B wie 5 zu 3 verhalte, so heißt dieses, daß es eine dritte Größe giebt, welche in A 5mal und in B 3mal enthalten ist.

Den Bruch 5 : 3 nennt man das Verhältniß der beiden Größen A und B; überhaupt versteht man unter dem Verhältniß zweier Größen den Bruch, der entsteht, wenn man die Maaßzahlen zweier Größen durch einander dividirt, — wobei vorausgesetzt ist, daß beide Größen durch die nehmliche Einheit gemessen sind.

3. Erklärung. Eine Gleichung zwischen zwei Brüchen heißt eine Zahlenproportion, z. B.

$$6 : 8 = 9 : 12,$$

und eine Gleichung zwischen zwei Größen-Verhältnissen heißt eine Größenproportion, z. B.

6 ℔ : 8 ℔ = 9 Thlr. : 12 Thlr.

Man unterscheidet Vorder- und Hinterglieder, innere und äußere Glieder.

4. Zusatz. In einer Größenproportion müssen natürlich die Glieder, welche ein Verhältniß bilden, gleichartig sein; dagegen können die Glieder des einen Verhältnisses mit denen des andern Verhältnisses gleichartig und ungleichartig sein. So sind z. B. in der Proportion

5 Fuß : 10 Fuß = 8 Fuß : 16 Fuß

alle Glieder gleichartig, dagegen in der Proportion

12 Ellen : 10 Ellen = 18 ℔ : 15 ℔

ist nur das erste Glied mit dem zweiten und das dritte mit dem vierten gleichartig.

5. Zusatz. Jede Größenproportion läßt sich in eine Zahlenproportion verwandeln, wenn man statt der Größen ihre Maaßzahlen setzt; — und umgekehrt kann man jede Zahlenproportion in eine richtige Größenproportion verwandeln, wenn man statt der Zahlen solche Größen setzt, welche diese Zahlen zu Maaßzahlen haben, wobei natürlich in beiden Fällen vorausgesetzt ist, daß die Größen, welche ein Verhältniß bilden, durch die nehmliche Einheit gemessen sind. Zur Erläuterung des eben Gesagten können die beiden Beispiele von Nro. 3 dienen.

6. Erklärung. Eine Proportion, in welcher die Mittelglieder einander gleich sind, heißt eine stetige Proportion, und das gleiche Mittelglied wird die mittlere Proportionale zwischen den beiden äußeren Gliedern genannt. — Eine stetige Zahlenproportion ist z. B. folgende: $4:6=6:9$.

7. Lehrsatz. In jeder Zahlenproportion ist das Product der äußeren Glieder gleich dem Producte der inneren Glieder, so ist z. B. in der Proportion $12:9 = 8:6$
das Product $12.6 = 9.8.$ *)

8. Lehrsatz. In jeder Zahlenproportion lassen sich die Vorder- und Hinterglieder vertauschen. — So erhält man, z. B. aus der eben angeführten Proportion, durch Vertauschung der Vorder- und Hinterglieder die ebenfalls richtige Proportion

$$9:12 = 6:8.$$

9. Lehrsatz. In jeder Proportion lassen sich die inneren Glieder vertauschen. — Ist z. B. wie oben

$$12:9 = 8:6$$

*) Die Beweise dieses und der folgenden Sätze finden sich in jedem Lehrbuche der Arithmetik. (Thl. I, S. 112 u. f.)

gegeben, so entsteht durch Vertauschung der Mittelglieder die ebenfalls richtige Proportion $12:8 = 9:6$.

10. Lehrsatz. 1. Ist in einer Zahlenproportion das erste Glied größer, eben so groß oder kleiner, als das zweite, so ist auch das dritte Glied größer, eben so groß oder kleiner, als das vierte; und wenn

2. das erste Glied größer, eben so groß oder kleiner, als das dritte ist, so ist auch das zweite Glied größer, eben so groß oder kleiner, als das vierte.

11. Lehrsatz. In jeder Zahlenproportion verhält sich die Summe oder Differenz des ersten und zweiten Gliedes zum zweiten, wie die Summe oder Differenz des dritten und vierten Gliedes zum vierten.

So folgt z. B. aus der Proportion

$$12:9 = 8:6$$

weiter $12+9:9 = 8+6:6$,

d. h. $21:9 = 14:6$,

und $12-9:9 = 8-6:6$,

d. h. $3:9 = 2:6$.

12. Lehrsatz. In jeder Zahlenproportion verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede. So folgt z. B. aus der obigen Proportion

$$12:9 = 8:6$$

weiter $12+8:9+6 = 12:9$,

d. h. $20:15 = 12:9$,

und $12-8:9-6 = 12:9$,

d. h. $4:3 = 12:9$.

13. Zusatz. Sind mehrere Verhältnisse als gleich gegeben, so verhält sich auch die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede. — Ist z. B. gegeben: $3:5 = 6:10 = 9:15$, so verhält sich auch

$$3+6+9:5+10+15 = 3:5,$$

d. h. $18:30 = 3:5$.

14. Lehrsatz. Die vorhergehenden Sätze von Zahlenproportionen gelten (vermöge Nro. 5) auch von Größenproportionen, mit Ausnahme jedoch von Nro. 7, da es ja ungereimt sein würde, Größen mit einander zu multipliciren; und Nro. 9, 12 und 13

gelten natürlich nur in dem Falle von Größenproportionen, wenn die Glieder sämmtlicher Verhältnisse gleichartig sind.

15. Erklärung. Im Vorhergehenden ist durchgehends angenommen, daß zwei Größen, welche ein Verhältniß bilden, sich wirklich durch eine dritte Größe ohne Rest messen lassen; dergleichen Größen nennt man commensurabel. Gleichartige Größen können aber auch incommensurabel sein, d. h. es ist nicht möglich, beide durch eine und dieselbe dritte Größe zu messen, indem jede Größe, welche in der einen aufgeht, in der andern einen Rest läßt. Das Verhältniß incommensurabler Größen kann daher auch nie genau, sondern nur näherungsweise in Zahlen ausgedrückt werden, d. h. es lassen sich nur Zahlen angeben, welche entweder größer oder kleiner sind, als das gesuchte Verhältniß. Diese Grenzen können jedoch allemal einander beliebig genähert, d. h. so bestimmt werden, daß ihr Unterschied kleiner wird, als jede noch so kleine gegebene Zahl. — Eine Zahl, welche selbst nicht darstellbar ist, für welche sich nur beliebig enge Grenzen angeben lassen, zwischen denen sie liegt, nennt man in der Arithmetik eine irrationale Zahl, während alle wirklich darstellbaren Zahlen rational heißen. — Das Verhältniß zweier incommensurablen Größen ist also irrational und zwei irrationale Verhältnisse heißen gleich, wenn sie beständig zwischen denselben Grenzen liegen, wie auch immer diese Grenzen einander genähert werden.

So wie aber sämmtliche Sätze der Arithmetik auch dann noch richtig bleiben, wenn man sie auf irrationale Zahlen anwendet, so gelten ins Besondere die im Vorhergehenden aufgeführten Sätze der Verhältnisse und Proportionen auch von den irrationalen Verhältnissen incommensurabler Größen.

Anm. Incommensurable Linien sind z. B. die Seite und die Diagonale eines Quadrats, indem das Verhältniß derselben $= 1 : \sqrt{2}$ ist*); und es ist daher niemals möglich, eine dritte Linie zu finden, welche in beiden aufgeht. Theilt man z. B. die Seite eines Quadrats in zehn gleiche Theile und mißt mit einem solchen Theile die Diagonale, so findet man, daß derselbe in der Hypotenuse mehr als 14, aber weniger als 15mal enthalten ist. Das Verhältniß zwischen Diagonale und Seite liegt also zwischen den Grenzen 14 : 10 u. 15 : 10 oder 1,4 u. 1,5. Theilt man nun, um dasselbe in engere Grenzen einzuschließen den zehnten Theil der Seite wieder in zehn gleiche und mißt mit die-

*) Nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist $d^2 = 2x^2$ (Fig. 169), also $d^2 : x^2 = 2 : 1$ und folglich $d : x = \sqrt{2} : 1 = 1{,}4142 \ldots$

sem Theile, welcher also in der Seite selbst hundert mal enthalten ist, denjenigen Rest, welcher geblieben ist, nachdem man den zehnten Theil der Seite auf die Diagonale vierzehn mal aufgetragen hatte, so findet man, daß dieser hunderte Theil der Seite in dem Reste mehr, als einmal, aber weniger, als zweimal, also in der Diagonale selbst mehr, als **141** und weniger, als **142**mal enthalten ist. Das Verhältniß der Diagonale zur Seite liegt also zwischen den engern Grenzen **141 : 100** und **142 : 100** oder **1,41** u. **1,42**. Auf diese Art fortfahrend, kann man das gesuchte Verhältniß in immer engere Grenzen einschließen; aber niemals wird man dahin gelangen, dasselbe vollständig auszudrücken; in wie viel Theile man auch immer die Seite eines Quadrats theilen mag, niemals wird einer dieser Theile in der Diagonale ohne Rest aufgehen.

B. Proportionalität der Linien,

welche von parallelen Linien durchschnitten werden.

§ 181. Lehrsatz.

Wenn eine Linie DE die Seiten eines Dreiecks ABC (Fig. 118) durchschneidet und mit der Grundlinie BC parallel ist, so verhalten sich

1) die oberen Abschnitte wie die unteren:

$$AD : BD = AE : CE,$$

2) die oberen Abschnitte wie die ganzen Seiten:

$$AD : AB = AE : AC,$$

3) die unteren Abschnitte wie die ganzen Seiten:

$$BD : AB = CE : AC.$$

Beweis. Ich bestimme zunächst das Verhältniß von AD zu BD und nehme an, es verhalte sich

$$AD : BD = 4 : 3;$$

dann giebt es eine dritte Linie, welche in AD viermal und in BD dreimal enthalten ist. Diese Linie trage ich auf AD viermal und auf BD dreimal auf und ziehe durch die Theilungspunkte Parallelen mit der Grundlinie BC. Dann theilen diese Linien auch AE in vier und CE in drei gleiche Theile, nach dem Satze: Wenn mehrere paralle Linien von einer schneidenden Linie gleiche Stücke abschneiden, so theilen sie auch jede andere schneidende Linie in gleiche Theile.

Demnach verhält sich

$$AE : CE = 4 : 3.$$

Nach der Annahme verhielt sich auch

$$AD : BD = 4 : 3,$$

folglich ist: 1) $AD : BD = AE : CE.$

Weiter verhält sich

$$AD : AB = 4 : 7$$

und auch $AE : AC = 4 : 7$

folglich ist 2) $AD : AB = AE : AC.$

Ferner verhält sich $BD : AB = 3 : 7$

und auch $CE : AC = 3 : 7,$

folglich ist 3) $BD : AB = CE : AC.$ *)

Anm. 1. Die Proportionen (2) und (3) konnten auch aus (1) mit Hilfe von Nro. 11 in § 180 abgeleitet werden.

Anm. 2. Wir haben bei dem Beweise des vorhergehenden Satzes angenommen, daß AD u. DB commensurabel sind. Sollte dieses nicht der Fall sein, so wird sich weder das Verhältniß AD : DB, noch AE : EC in Zahlen genau ausdrücken lassen, und man wird sich darauf beschränken müssen, zu zeigen, daß diese Verhältnisse allemal zwischen denselben Grenzen liegen. — Um dieses darzuthun, theile man AD (Fig. 119) in eine beliebige Anzahl, z. B. in m gleiche Theile, und nenne einen dieser Theile der Kürze wegen α. Da AD und BD incommensurabel sind, so kann der Theil α in BD nicht aufgehen; angenommen er lasse sich auf BD nmal auftragen, und es bleibe dann noch ein Rest, welcher kleiner ist, als α; so wird, wenn wir α nochmals auftragen, sein Endpunkt F über B hinausfallen. Da nun $AD = m\alpha$ und $BD > n\alpha$, aber $< (n + 1)\alpha$ ist, so ist folglich

$$\frac{BD}{AD} > \frac{n}{m}, \text{ aber } \frac{BD}{AD} < \frac{n+1}{m}.$$

Ziehen wir nun durch die Theilungspunkte der Linie AB und durch den Punkt F Parallelen mit der Grundlinie BC, so werden auch auf AC gleiche Stücke abgeschnitten, und wenn wir einen solchen Theil β nennen, so ist $AE = m\beta$ und $EC > n\beta$, aber $< (n+1)\beta$, folglich

$$\frac{CE}{AE} > \frac{m}{n}, \text{ aber } \frac{CE}{AE} < \frac{n+1}{m}.$$

Es liegen also beide Verhältnisse BD : AD und CE : AE zwischen den nehmlichen Grenzen n : m und n + 1 : m, und da dieses immer stattfin-

---

*) Man kann in dem so eben angeführten Beweise auch statt der bestimmten Zahlen 4, 3 und 7 die allgemeinen Zeichen m, n u. m + n setzen, alles Andere aber wörtlich beibehalten und so dem Beweise das Ansehn größerer Allgemeinheit geben.

det, in wie viele Theile man auch AD theilen mag, so sind die beiden irrationalen Verhältnisse einander gleich, also

BD : AD = CE : AE.

§ 182. Zusatz.

Es verhält sich auch die Grundlinie des abgeschnittenen Dreiecks (DE) zur Grundlinie des gegebenen Dreiecks (BC), wie ein oberer Abschnitt (AD) zur ganzen Seite (AB, Fig. 120).

Beweis. Man ziehe durch D mit AC eine Parallele DF und denke sich AC als Grundlinie, AB und BC aber als Seiten des Dreiecks ABC; dann sind AD und CF die unteren Abschnitte. Nach § 181, 3 verhalten sich die unteren Abschnitte wie die ganzen Seiten, also CF : AD = BC : AB.
Statt CF kann man aber auch DE setzen, weil diese als gegenüberstehende Seiten im Parallelogramm DECF, einander gleich sind; also verhält sich auch

DE : AD = BC : AB, w. z. e. w.

§ 183. Lehrsatz.

Eine Linie, welche die Seiten eines Dreiecks in proportionirte Stücke theilt, ist der Grundlinie parallel.

Beweis. Es verhalte sich in Figur 121

AD : AB = AE : AC,

so ist DE ∥ BC zu erweisen.

Wir führen diesen Beweis indirect und nehmen an, DE sei mit BC nicht parallel, so wird sich durch D eine andere Linie DF parallel BC ziehen lassen. Wenn nun DF mit BC parallel wäre, so müßte sich nach § 181, 2 verhalten

AD : AB = AF : AC.

Nach der Voraussetzung verhält sich aber

AD : AB = AE : AC,

folglich müßte sich auch verhalten

AF : AC = AE : AC,

welches nach § 180, 10 unmöglich ist. Demnach kann nicht DF, sondern allein DE mit BC parallel sein.

*§ 184. Lehrsatz.

1) Wenn man in einem Trapeze ABCD (Fig. 122) eine Linie EF mit den parallelen Seiten AB und CD parallel zieht, so theilt

diese die nicht parallelen Seiten AD und BC in proportionirte Stücke, und umgekehrt

2) eine Linie EF, welche die nicht parallelen Seiten eines Trapezes ABCD in proportionirte Stücke theilt, ist mit den parallelen Seiten parallel.

Der Beweis für die erste dieser beiden Behauptungen ist vermöge § 112 ganz derselbe, wie von § 181; hieraus folgt aber die zweite Behauptung eben so auf indirectem Wege, wie sich die Richtigkeit des vorhergeh. § aus § 181 ergeben hat.

Anm. Von den vorhergehenden allgemeinern Sätzen § **181** und **184** sind die §§ **109** und **111** besonders merkwürdige Fälle.

* § 185. Lehrsatz.

Wenn zwei parallele Linien AC und DF (Fig. 123) von drei aus einem Punkte G ausgehenden Linien GD, GE und GF durchschnitten werden, so sind die von den parallelen Linien abgeschnittenen Stücke proportionirt; es verhält sich nehmlich

$$AB : DE = BC : EF.$$

Beweis. In dem $\triangle$ DEG verhält sich zunächst nach § 182

$$AB : DE = GB : GE$$

und in dem Dreiecke EFG nach demselben §

$$BC : EF = GB : GE,$$

folglich verhält sich auch

$$AB : DE = BC : EF.$$

* § 186. Lehrsatz.

1) Die Linie CD, welche den Winkel an der Spitze eines Dreiecks ABC (Fig. 124) halbirt, theilt die Grundlinie AB in zwei Stücke, welche sich wie die anliegenden Seiten verhalten, nehmlich $AD : BD = AC : BC.$

Beweis. Ziehe durch A eine Parallele zu CD, welche die verlängerte BC in E schneidet. — Dann ist Winkel $m = o$ und $n = p$, folglich da $m = n$ vorausgesetzt ist, auch $o = p$ und daher $AC = CE$. Weil aber $AE \parallel CD$ ist, so verhält sich

$$AD : BD = CE : BC,$$

oder da ich statt CE auch AC setzen kann:

$$AD : BD = AC : BC.$$

2) Umgekehrt, wenn diese Proportion gegeben ist, so halbirt CD den Winkel ACB.

Beweis. Wenn CD den Winkel ACB nicht halbirte, so würde irgend eine andere Linie dieses thun. Bezeichnen wir nun den Punkt, in welchem diese Linie die Grundlinie AB durchschneiden würde, mit X, so würde sich nach Nr. 1 verhalten

$$AX:BX = AC:BC,$$

welches gegen die Voraussetzung streitet.

Anm. Im gleichschenkligen Dreiecke halbirt die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze auch die Grundlinie; im ungleichschenkligen Dreiecke theilt sie die Grundlinie in zwei ungleiche Theile und zwar ist zu Folge des eben erwiesenen Satzes derjenige Theil der größere, welcher an der größern Seite liegt.

C. Von der Aehnlichkeit geradliniger Figuren, ins Besondere der Dreiecke.

Bemerkung. Wenn man in einem Dreiecke ABC (Fig. 125) mit einer Seite BC eine Parallele DE zieht, so stimmt das Dreieck ADE mit ABC, wie man leicht sieht, in allen Winkeln und vermöge § 181 auch im Verhältnisse der einschließenden Seiten überein. Wir werden daher mit Recht behaupten können, daß diese beiden Dreiecke, welche nur in der Größe verschieden sind, einerlei Gestalt haben, also ähnlich sind. — Verallgemeinern wir das so eben Gesagte, so erhalten wir die folgende Erklärung.

§ 187. Erklärung.

Zwei Vielecke sind ähnlich $\sim$, wenn sie in allen Winkeln und in dem Verhältnisse der gleichliegenden (d. h. gleiche Winkel einschließenden) Seiten übereinstimmen.

Anm. Wenn das Vieleck ABCDEF $\sim$ abcdef (Fig. 130) sein soll, so muß Winkel A = a, B = b, C = c, D = d, E = e und F = f sein, ferner muß sich verhalten

$$AB:ab = BC:bc = CD:cd = DE:de = EF:ef = FA:fa,$$

also wenn z. B. ab = $^3/_5$ AB ist, so muß auch bc = $^3/_5$ BC, cd = $^3/_5$ CD, de = $^3/_5$ DE, ef = $^3/_5$ EF und FA = $^3/_5$ fa sein.

§ 188. Zusatz.

1) Zwei Vielecke, welche einem dritten ähnlich sind, sind auch unter sich ähnlich.

2) Congruente Vielecke sind auch ähnlich.

3) Alle gleichseitigen Dreiecke, alle Quadrate, überhaupt alle regelmäßigen Vielecke von gleicher Seitenzahl sind ähnlich.

4) Da wir uns den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten denken, so sind auch alle Kreise einander ähnlich.

§ 189. Lehrsatz.

Wenn man in einem Dreiecke ABC mit der Grundlinie BC eine Parallele DE zieht, so ist das abgeschnittene Dreieck ADE dem ganzen Dreiecke ABC ähnlich (Fig. 125).

Beweis. Die Dreiecke ABC und ADE stimmen erstens in allen Winkeln überein. Denn Winkel A ist gemeinschaftlich und Winkel B = D und C = E, weil DE ∥ BC ist. — Zweitens stimmen sie auch im Verhältnisse der gleichliegenden Seiten überein. Denn nach § 181 verhält sich

AB : AD = AC : AE

und nach § 182: BC : DE = AB : AD.

Folglich ist △ ABC ∾ ADE.

Bemerkung. Wenn man in den Congruenzsätzen der Dreiecke (§§ 66, 69, 71 u. 73) da, wo die Uebereinstimmung in der Größe zweier oder aller drei Seiten gegeben ist, nur Uebereinstimmung im Verhältnisse dieser Seiten annimmt, und folglich in § 69 ins Besondere, wo nur die Uebereinstimmung in der Größe einer Seite vorgeschrieben ist, diese Bedingung ganz wegläßt, die übrigen Bedingungen aber beibehält, so ergeben sich die folgenden Sätze der Aehnlichkeit.

§ 190. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke (ABC und abc, Fig. 126) sind ähnlich, wenn sie in der Größe zweier Winkel (A = a u. B = b) übereinstimmen.

Beweis. Man lege die gegebenen Dreiecke so aufeinander, daß ein Paar gleiche Winkel, z. B. A u. a, sich decken, also so, daß der Punkt a auf A, Seite ab auf AB und Seite ac auf AC fällt; dann ist Seite bc ∥ BC, weil Winkel b = B vorausgesetzt ist; und folglich ist nach § 189 △ abc ∾ ABC.

§ 191. Zusatz.

Zwei gleichschenklige Dreiecke sind schon dann ähnlich, wenn sie in dem Winkel an der Spitze oder einem Winkel an der Grundlinie übereinstimmen, weil durch den einen gegebenen Winkel auch die übrigen bestimmt sind.

§ 192. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke (ABC und abc, Fig. 126) sind ferner ähnlich, wenn sie in der Größe eines Winkels (A = a) und dem Verhält-

nisse der einschließenden Seiten (AB : ab = AC : ac) übereinstimmen.

Beweis. Man lege (eben so wie im vorherg. §) die gegebenen Dreiecke so zusammen, daß die gleichen Winkel A u. a sich decken, also der Punkt A auf a, die Seite ab auf AB und ac auf AC fällt; dann ist die Seite bc ‖ BC, weil nach der Voraussetzung sich verhält ab : AB = ac : AC,
und zu Folge § 183 eine Linie, welche die Seiten eines Dreiecks in proportionirte Stücke theilt, der Grundlinie parallel ist. Da nun bc ‖ BC erwiesen ist, so ist folglich nach § 189 △ abc ∾ ABC.

*§ 193. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke ABC und abc (Fig. 127) sind ferner ähnlich, wenn sie in dem Verhältnisse aller drei Seiten übereinstimmen, also wenn sich verhält:

AB : ab = AC : ac = BC : bc *).

Beweis. Man mache AD = ab und AE = ac und ziehe DE. Dann ist erstens zu erweisen, daß △ ADE ∾ ABC, und zweitens, daß △ ADE ≌ abc ist.

1) Da zu Folge der Voraussetzung sich verhält

AB : ab = AC : ac

und ab = AD und ac = AE gemacht ist, so verhält sich auch

AB : AD = AC : AE.

Folglich ist nach § 183 DE ‖ BC und daher nach § 189 △ ADE ∾ abc.

2) Um ferner die Congruenz der Dreiecke ADE und abc erweisen zu können, müssen wir vorher zeigen, daß DE = bc ist. — Da DE ‖ BC ist, so verhält sich

DE : BC = AD : AB,

oder da AD = ab ist:

DE : BC = ab : AB;

und nach der Voraussetzung verhält sich

bc : BC = ab : AB;

folglich verhält sich auch

DE : BC = bc : BC,

also ist: DE = bc.

---

*) Dieser und der folgende Satz lassen sich aus gleichen Gründen, wie die entsprechenden Congruenzfälle, nicht durch Zusammenlegen der Dreiecke erweisen.

diese die nicht parallelen Seiten AD und BC in proportionirte Stücke, und umgekehrt

2) eine Linie EF, welche die nicht parallelen Seiten eines Trapezes ABCD in proportionirte Stücke theilt, ist mit den parallelen Seiten parallel.

Der Beweis für die erste dieser beiden Behauptungen ist vermöge § 112 ganz derselbe, wie von § 181; hieraus folgt aber die zweite Behauptung eben so auf indirectem Wege, wie sich die Richtigkeit des vorhergeh. § aus § 181 ergeben hat.

Anm. Von den vorhergehenden allgemeinern Sätzen § 181 und 184 sind die §§ 109 und 111 besonders merkwürdige Fälle.

* § 185. Lehrsatz.

Wenn zwei parallele Linien AC und DF (Fig. 123) von drei aus einem Punkte G ausgehenden Linien GD, GE und GF durchschnitten werden, so sind die von den parallelen Linien abgeschnittenen Stücke proportionirt; es verhält sich nehmlich

$$AB : DE = BC : EF.$$

Beweis. In dem $\triangle$ DEG verhält sich zunächst nach § 182

$$AB : DE = GB : GE$$

und in dem Dreiecke EFG nach demselben §

$$BC : EF = GB : GE,$$

folglich verhält sich auch

$$AB : DE = BC : EF.$$

* § 186. Lehrsatz.

1) Die Linie CD, welche den Winkel an der Spitze eines Dreiecks ABC (Fig. 124) halbirt, theilt die Grundlinie AB in zwei Stücke, welche sich wie die anliegenden Seiten verhalten, nehmlich $AD : BD = AC : BC.$

Beweis. Ziehe durch A eine Parallele zu CD, welche die verlängerte BC in E schneidet. — Dann ist Winkel $m = o$ und $n = p$, folglich da $m = n$ vorausgesetzt ist, auch $o = p$ und daher $AC = CE$. Weil aber $AE \parallel CD$ ist, so verhält sich

$$AD : BD = CE : BC,$$

oder da ich statt CE auch AC setzen kann:

$$AD : BD = AC : BC.$$

2) Umgekehrt, wenn diese Proportion gegeben ist, so halbirt CD den Winkel ACB.

Beweis. Wenn CD den Winkel ACB nicht halbirte, so würde irgend eine andere Linie dieses thun. Bezeichnen wir nun den Punkt, in welchem diese Linie die Grundlinie AB durchschneiden würde, mit X, so würde sich nach Nr. 1 verhalten

$$AX:BX = AC:BC,$$

welches gegen die Voraussetzung streitet.

Anm. Im gleichschenkligen Dreiecke halbirt die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze auch die Grundlinie; im ungleichschenkligen Dreiecke theilt sie die Grundlinie in zwei ungleiche Theile und zwar ist zu Folge des eben erwiesenen Satzes derjenige Theil der größere, welcher an der größern Seite liegt.

C. Von der Aehnlichkeit geradliniger Figuren, ins Besondere der Dreiecke.

Bemerkung. Wenn man in einem Dreiecke ABC (Fig. 125) mit einer Seite BC eine Parallele DE zieht, so stimmt das Dreieck ADE mit ABC, wie man leicht sieht, in allen Winkeln und vermöge § 181 auch im Verhältnisse der einschließenden Seiten überein. Wir werden daher mit Recht behaupten können, daß diese beiden Dreiecke, welche nur in der Größe verschieden sind, einerlei Gestalt haben, also ähnlich sind. — Verallgemeinern wir das so eben Gesagte, so erhalten wir die folgende Erklärung.

§ 187. Erklärung.

Zwei Vielecke sind ähnlich $\sim$, wenn sie in allen Winkeln und in dem Verhältnisse der gleichliegenden (d. h. gleiche Winkel einschließenden) Seiten übereinstimmen.

Anm. Wenn das Vieleck ABCDEF $\sim$ abcdef (Fig. 130) sein soll, so muß Winkel A = a, B = b, C = c, D = d, E = e und F = f sein, ferner muß sich verhalten

$$AB:ab = BC:bc = CD:cd = DE:de = EF:ef = FA:fa,$$

also wenn z. B. ab = $\frac{3}{5}$ AB ist, so muß auch bc = $\frac{3}{5}$ BC, cd = $\frac{3}{5}$ CD, de = $\frac{3}{5}$ DE, ef = $\frac{3}{5}$ EF und FA = $\frac{3}{5}$ fa sein.

§ 188. Zusatz.

1) Zwei Vielecke, welche einem dritten ähnlich sind, sind auch unter sich ähnlich.

2) Congruente Vielecke sind auch ähnlich.

3) Alle gleichseitigen Dreiecke, alle Quadrate, überhaupt alle regelmäßigen Vielecke von gleicher Seitenzahl sind ähnlich.

4) Da wir uns den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten denken, so sind auch alle Kreise einander ähnlich.

§ 189. Lehrsatz.

Wenn man in einem Dreiecke ABC mit der Grundlinie BC eine Parallele DE zieht, so ist das abgeschnittene Dreieck ADE dem ganzen Dreiecke ABC ähnlich (Fig. 125).

Beweis. Die Dreiecke ABC und ADE stimmen erstens in allen Winkeln überein. Denn Winkel A ist gemeinschaftlich und Winkel B = D und C = E, weil DE ∥ BC ist. — Zweitens stimmen sie auch im Verhältnisse der gleichliegenden Seiten überein. Denn nach § 181 verhält sich

$$AB : AD = AC : AE$$

und nach § 182: $BC : DE = AB : AD.$

Folglich ist △ ABC ∾ ADE.

Bemerkung. Wenn man in den Congruenzsätzen der Dreiecke (§§ 66, 69, 71 u. 73) da, wo die Uebereinstimmung in der Größe zweier oder aller drei Seiten gegeben ist, nur Uebereinstimmung im Verhältnisse dieser Seiten annimmt, und folglich in § 69 ins Besondere, wo nur die Uebereinstimmung in der Größe einer Seite vorgeschrieben ist, diese Bedingung ganz wegläßt, die übrigen Bedingungen aber beibehält, so ergeben sich die folgenden Sätze der Aehnlichkeit.

§ 190. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke (ABC und abc, Fig. 126) sind ähnlich, wenn sie in der Größe zweier Winkel (A = a u. B = b) übereinstimmen.

Beweis. Man lege die gegebenen Dreiecke so aufeinander, daß ein Paar gleiche Winkel, z. B. A u. a, sich decken, also so, daß der Punkt a auf A, Seite ab auf AB und Seite ac auf AC fällt; dann ist Seite bc ∥ BC, weil Winkel b = B vorausgesetzt ist; und folglich ist nach § 189 △ abc ∾ ABC.

§ 191. Zusatz.

Zwei gleichschenklige Dreiecke sind schon dann ähnlich, wenn sie in dem Winkel an der Spitze oder einem Winkel an der Grundlinie übereinstimmen, weil durch den einen gegebenen Winkel auch die übrigen bestimmt sind.

§ 192. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke (ABC und abc, Fig. 126) sind ferner ähnlich, wenn sie in der Größe eines Winkels (A = a) und dem Verhält-

nisse der einschließenden Seiten (AB : ab = AC : ac) übereinstimmen.

Beweis. Man lege (eben so wie im vorherg. §) die gegebenen Dreiecke so zusammen, daß die gleichen Winkel A u. a sich decken, also der Punkt A auf a, die Seite ab auf AB und ac auf AC fällt; dann ist die Seite bc || BC, weil nach der Voraussetzung sich verhält ab : AB = ac : AC,
und zu Folge § 183 eine Linie, welche die Seiten eines Dreiecks in proportionirte Stücke theilt, der Grundlinie parallel ist. Da nun bc || BC erwiesen ist, so ist folglich nach § 189 △ abc ∾ ABC.

*§ 193. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke ABC und abc (Fig. 127) sind ferner ähnlich, wenn sie in dem Verhältnisse aller drei Seiten übereinstimmen, also wenn sich verhält:

AB : ab = AC : ac = BC : bc *).

Beweis. Man mache AD = ab und AE = ac und ziehe DE. Dann ist erstens zu erweisen, daß △ ADE ∾ ABC, und zweitens, daß △ ADE ≌ abc ist.

1) Da zu Folge der Voraussetzung sich verhält

AB : ab = AC : ac

und ab = AD und ac = AE gemacht ist, so verhält sich auch

AB : AD = AC : AE.

Folglich ist nach § 183 DE || BC und daher nach § 189 △ ADE ∾ abc.

2) Um ferner die Congruenz der Dreiecke ADE und abc erweisen zu können, müssen wir vorher zeigen, daß DE = bc ist. — Da DE || BC ist, so verhält sich

DE : BC = AD : AB,

oder da AD = ab ist:

DE : BC = ab : AB;

und nach der Voraussetzung verhält sich

bc : BC = ab : AB;

folglich verhält sich auch

DE : BC = bc : BC,

also ist: DE = bc.

*) Dieser und der folgende Satz lassen sich aus gleichen Gründen, wie die entsprechenden Congruenzfälle, nicht durch Zusammenlegen der Dreiecke erweisen.

Ferner ist $AD = ab$ } gemacht,
und $AE = ac$ }

folglich $\triangle ADE \cong abc.$

Da wir nun $\triangle ADE \sim ABC$

bereits erwiesen haben, so ist folglich auch

3) $\triangle abc \sim ABC$, w. z. e. w.

* § 194. Lehrsatz.

Wenn zwei Dreiecke ABC und abc (Fig. 127 und 128) in dem Verhältnisse zweier Seiten ($AB : ab = AC : ac$) und einem Winkel an der dritten Seite (W. $B = b$) übereinstimmen, so sind entweder auch die beiden andern Winkel an der dritten Seite (W. C und c) einander gleich, oder diese beiden Winkel ergänzen sich zu einem Flachen.

Beweis. Man mache wieder $AD = ab$ und $AE = ac$; dann ist aus denselben Gründen wie im vorhergeh. § $DE \parallel BC$ und daher 1) $\triangle ADE \sim ABC$.

2) Da Winkel $D = B$ ist, weil $DE \parallel BC$ erwiesen ist, und da ferner Winkel $B = b$ vorausgesetzt ist, so ist auch

W. $D = b$.

Ferner ist $AD = ab$ } gemacht.
und $AE = ac$ }

Demnach stimmen die beiden Dreiecke ADE und abc in zwei Seiten und einem Winkel an der dritten überein, und folglich sind nach § 73 entweder die beiden andern Winkel an der dritten Seite E und c (Fig. 127) einander gleich oder sie ergänzen sich zu einem Flachen (Fig. 128). Im ersten Falle ist $\triangle ADE \cong abc$, also auch 3) $\triangle ABC \sim abc$.

Im andern Falle ergänzen sich die beiden Winkel E u. c und folglich auch C u. c zu einem Flachen.

* § 195. Zusatz.

1) Zwei Dreiecke sind daher gewiß ähnlich, wenn sie in dem Verhältnisse zweier Seiten und dem der größern Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

Beweis. Denn in diesem Falle ist (nach § 74) $\triangle ADE$ nothwendig $\cong abc$ (Fig. 127) und folglich $\triangle abc \cong ABC$.

2) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind folglich ähnlich, wenn sie im Verhältnisse der Hypotenuse und einer Cathete übereinstimmen.

§ 196. Lehrsatz.

In ähnlichen Dreiecken (ABC und abc, Fig. 129) verhalten sich die Höhen (CD u. cd) wie die gleichliegenden Seiten, also ins Besondere auch wie die Grundlinien (AB und ab).

Beweis. Da Dreieck ABC $\sim$ abc vorausgesetzt ist, so ist auch W. A = a;
ferner ist W. ADC = adc, als Rechte,
folglich $\triangle$ ADC $\sim$ adc nach § 190.
Demnach verhält sich CD : cd = AC : ac,
und wegen Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und abc verhält sich weiter AC : ac = AB : ab,
folglich verhält sich auch
CD : cd = AB : ab.

Anm. Sollten die Winkel A und a stumpf sein, so sind jedenfalls B und b spitz, und man wird dann den nehmlichen Beweis mit Benutzung der Dreiecke BDC und bdc führen können.

§ 197. Lehrsatz.

1) Wenn zwei Vielecke ABCDEF und abcdef (Fig. 130) einander ähnlich sind, und man zerschneidet dieselben durch Diagonalen aus gleichliegenden Ecken A und a gezogen in Dreiecke, so sind auch die entstandenen Dreiecke ähnlich, nehmlich $\triangle$ ABC $\sim$ abc, $\triangle$ ACD $\sim$ acd, $\triangle$ ADE $\sim$ ade, $\triangle$ AEF $\sim$ aef.

Beweis. Die Dreiecke ABC und abc sind ähnlich, weil sie in einem Winkel und dem Verhältnisse der einschließenden Seiten übereinstimmen, nehmlich
W. B = b
und AB : ab = BC : bc, } weil die Vielecke ABCDEF u. abcdef als ähnlich vorausgesetzt sind;
folglich $\triangle$ ABC $\sim$ abc nach § 192.

Die Dreiecke ACD und acd sind ebenfalls nach dem so eben angeführten Satze ähnlich; es ist nehmlich
1) W. ACD = acd, weil W. BCD = bcd wegen Aehnlichkeit der Vielecke und W. BCA = bca, da $\triangle$ ABC $\sim$ abc ist.
2) AC : ac = CD : cd; denn da $\triangle$ ABC $\sim$ abc erwiesen ist, so verhält sich AC : ac = BC : bc, und da die Vielecke als ähnlich vorausgesetzt sind, so verhält sich BC : bc = CD : cd, folglich verhält sich auch AC : ac = CD : cd. — Demnach ist
$\triangle$ ACD $\sim$ acd, weil sie in einem Winkel und dem Verhält-

nisse der einschließenden Seiten übereinstimmen. —

Eben so können auch die übrigen Dreiecke als ähnlich erwiesen werden.

2) Wenn die Dreiecke als ähnlich gegeben sind, △ ABC ∾ abc, ACD ∾ acd u. s. w., so müssen auch die Vielecke ähnlich sein.

Beweis. Denn erstens ihre Winkel sind gleich:

W. ABC = abc, weil △ ABC ∾ abc vorausgesetzt ist,

W. BCD = bcd, weil sie aus gleichen Stücken bestehen,

u. s. w. Zweitens stimmen die Vielecke auch im Verhältnisse der gleichliegenden Seiten überein. Es verhält sich nehmlich zunächst

AB : ab = BC : bc, weil △ ABC ∾ abc vorausgesetzt ist;

ferner verhält sich auch BC : bc = CD : cd; denn es verhält sich:

BC : bc = AC : ac, weil △ ABC ∾ abc vorausg. ist,

und AC : ac = CD : cd, weil △ ACD ∾ acd vorausg. ist,

folglich auch BC : bc = CD : cd.

Eben so werden auch die Verhältnisse der übrigen gleichliegenden Seiten als gleich erwiesen.

§ 198. Lehrsatz.

1) In regelmäßigen Vielecken von gleicher Seitenzahl (z. B. in den regelmäßigen Fünfecken ABCDE u. abcde, Fig. 131) verhalten sich die Radien der umschriebenen Kreise (AM u. am) und die Radien der eingeschriebenen Kreise (FM u. fm) wie ein Paar Seiten (z. B. AB u. ab).

Beweis. Da die beiden regelmäßigen Vielecke ABCDE und abcde eine gleiche Seitenzahl haben, so ist Centriwinkel AMB = amb, folglich auch nach § 191 das gleichschenklige Dreieck AMB ∾ amb, folglich verhält sich AM : am = AB : ab

und vermöge § 196 auch FM : fm = AB : ab.

2) Da bei zwei regelmäßigen Vielecken von gleicher Seitenzahl sich die Umfänge offenbar wie ein Paar Seiten verhalten, so müssen sich folglich diese Umfänge auch wie die Radien der umschriebenen oder eingeschriebenen Kreise verhalten, und wenn wir uns zwei Kreise als ähnliche regelmäßige Vielecke von unendlich vielen Seiten denken, so folgt hieraus:

Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich wie die Radien oder Durchmesser.

Anm. Wenn man also bei einem Kreise den Durchmesser verdoppelt oder verdreifacht, so wird auch die Peripherie verdoppelt oder verdreifacht.

§ 199. Lehrsatz.

Wenn man in einem rechtwinkligen Dreieck ABC (Fig. 132) aus der Spitze des rechten Winkels C ein Loth CD auf die Hypotenuse AB fällt, so ist

I. △ ACD ∾ ABC,

denn Winkel A ist gemeinschaftlich und Winkel ADC = ACB, als rechte (folglich auch Winkel $\beta = B$.)

II. △ CBD ∾ ABC,

denn Winkel B ist gemeinschaftlich und Winkel CDB = ACB, als rechte, (folglich auch $\alpha = A$.)

III. △ ACD ∾ CBD,

weil beide ähnlich dem △ ABC erwiesen sind.

Da die Dreiecke ABC und ACD einander ähnlich sind, so müssen auch ihre gleichliegenden Seiten ein gleiches Verhältniß zu einander haben; es muß sich folglich verhalten (Hypotenuse zu Hypotenuse, wie größere Cathete zur größern Cathete, wie kleinere Cathete zur kleinern Cathete, d. h.:)

$$AB:AC = BC:CD = AC:AD,$$

also ins Besondere

IV. $AB:AC = AC:AD$,

d. h. die Cathete AC ist die mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse AB und dem anliegenden Segmente AD.

Eben so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC u. CBD

V. $AB:BC = BC:BD$.

Endlich stimmen auch die ähnlichen Dreiecke CBD und ACD in dem Verhältnisse der gleichliegenden Seiten überein; es muß sich folglich verhalten (Hypotenuse zu Hypotenuse, wie größere Cathete zur größern Cathete, wie kleinere Cathete zur kleinern Cathete, d. h.:) $BC:AC = BD:CD = CD:AD$,

also ins Besondere

VI. $BD:CD = CD:AD$,

d. h. das Loth CD ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Segmenten der Hypotenuse AD u. BD.

Anm. Der Zusammenhang dieses Satzes mit § 170 und 171 wird sich weiter unten ergeben.

D. Proportionen zwischen Linien in und am Kreise.

§ 200. Lehrsatz.

1) Wenn in einem Kreise zwei Sehnen AB und DE (Fig. 133) sich durchschneiden, so bilden die Abschnitte der einen (AF und

BF) die äußern und die Abschnitte der andern (DF u. EF) die innern Glieder einer richtigen Proportion.

Beweis. Denn wenn man AE und BD zieht, so sind die entstandenen Dreiecke AEF und BDF ähnlich, weil sie in zwei Winkeln übereinstimmen, nehmlich

W. AEF = BFD als Scheitelwinkel,

W. A = D, als Peripheriew. auf demselben Bogen BE,

folglich △ AEF ∾ DBF.

Demnach verhält sich:

AF:DF = EF:BF, w. z. b. w.

2) Wenn von einem Punkte F (Fig. 134) außerhalb eines Kreises zwei Secanten AF und DF an denselben gezogen sind, so verhalten sich die ganzen Secanten AF und DF umgekehrt wie die äußern Abschnitte BF und EF.

Beweis. Denn wenn wir AE und BD ziehen, so sind die entstandenen Dreiecke AEF und DBF ähnlich, weil sie in zwei Winkeln übereinstimmen, nehmlich

W. F = F,

W. A = D, als Peripheriew. auf demselben Bogen BE,

folglich △ AEF ∾ DBF,

demnach verhält sich:

AF:DF = EF:BF.

3) Wenn aus einem Punkte F (Fig. 135) außerhalb eines Kreises eine Tangente DF und eine Secante AF an einen Kreis gezogen sind, so ist die Tangente DF die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Secante AF und dem äußern Abschnitte BF.

Beweis. Wenn man AD und BD zieht, so sind die entstandenen Dreiecke ADF und DBF ähnlich aus Gleichheit zweier Winkel, nehmlich

W. F = F,

W. FAD = BDF, denn der Winkel, welchen die Sehne mit der Tangente bildet, ist dem Winkel im entgegengesetzten Abschnitte gleich,

folglich △ ADF ∾ DBF;

demnach verhält sich:

AF:DF = DF:BF.

E. Aufgaben.

§ 201. Aufgabe.

Zu drei gegebenen Linien a, b und c (Fig. 136) die vierte Proportionale x zu finden, so daß sich verhält

$$a:b = c:x$$

Die Analysis ist in § 181, 1 enthalten.

Aufl. Man zeichne einen beliebigen Winkel D (Fig. 136), schneide von dem einen Schenkel a = DE, von E aus b = EF und von dem andern Schenkel c = DG ab, ziehe ferner EG und damit durch den Punkt F die Parallele FH, so ist GH = x die gesuchte Linie nach § 181, 1.

Anm. Andere Auflösungen ergeben § 181, 2 u. 3, § 182 und § 200, 1 u. 2.

§ 202. Aufgabe.

Zu zwei gegebenen Linien a u. b die mittlere Proportionale x zu finden, so daß sich also verhält

$$a:x = x:b.$$

Aufl. 1) (Die Analysis ist in § 199, VI. enthalten. —). Man schneide von einer beliebigen Linie a = CD (Fig. 137) und von D aus b = DE ab, halbire CE in G, beschreibe um G über CE einen Halbkreis und errichte in D ein Loth, welches den Halbkreis in F trifft, so ist DF = x die mittlere Proportionale zwischen a u. b.

Beweis. Denn wenn wir CF und EF ziehen, so ist Winkel CFE ein rechter, als Winkel im Halbkreise. Nach § 199, IV ist aber das Loth DF aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällt die mitttere Proportionale zwischen den beiden Segmenten CD und DE, also

$$a:x = x:b.$$

Aufl. 2) (Die Analysis ist in § 199, IV enthalten.) — Man ziehe eine Linie CD = a (Fig. 138), schneide von derselben CE = b ab, beschreibe über CD einen Halbkreis, errichte in E ein Loth, welches den Halbkreis in H trifft, und verbinde C mit H, so ist CH = x die mittlere Proportionale zwischen a u. b.

Beweis. Denn wenn wir DH ziehen, so ist Winkel CHD ein rechter, als Winkel im Halbkreise. — Nach § 199, IV ist die Cathete CH die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse CD und dem der Cathete anliegenden Segmente CE, also

$$a:x = x:b.$$

Anm. Auch § 200, 3 kann zur Auflösung benutzt werden.

§ 203. Aufgabe.

Ueber eine gegebene Linie ab (Fig. 126) ein Dreieck so zu zeichnen, daß es einem gegebenen Dreiecke ABC ähnlich wird und die Seiten ab und AB in beiden eine gleiche Lage haben.

Aufl. Man trage an ab in den Endpunkten a und b die Winkel cab = CAB und cba = CBA an, so ist △ abc ∾ ABC nach § 190.

§ 204. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Linie ab (Fig. 130) ein Vieleck so zu zeichnen, daß es einem gegebenen Vielecke ABCDEF ähnlich wird und die Linie ab mit der Seite AB eine gleiche Lage erhält.

Aufl. Man zerschneide das gegebene Vieleck ABCDEF, durch Diagonalen aus der Ecke A gezogen, in Dreiecke und mache nach dem vorhergeh. § △ abc ∾ ABC, so daß die Seiten ab und AB eine gleiche Lage erhalten; ferner mache man auf gleiche Weise △ acd ∾ ACD, △ ade ∾ ADE und △ aef ∾ AEF, dann ist Vieleck ABCDEF ∾ abcdef nach § 197, 2.

Uebungsaufgaben.

A. Dreiecks- und Vierecksaufgaben.

Aufgabe 251 — 261. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

251) zwei Winkel;

252) ein Winkel und das Verhältniß der einschließenden Seiten;

253) das Verhältniß aller drei Seiten;

254) das Verhältniß zweier Seiten und ein Winkel an der dritten (zwei Aufl.);

255) der Winkel an der Spitze und das Verhältniß zwischen Höhe und Grundlinie;

256) der Winkel an der Spitze und das Verhältniß der Segmente;

257) der Winkel an der Spitze und das Verhältniß zwischen den aus den Endpunkten der Grundlinie auf die Seiten gefällten Lothe;

258) das Verhältniß der aus den drei Ecken auf die gegenüberstehenden Seiten gefällten Lothe;

259) der Unterschied der Winkel an der Grundlinie und das Verhältniß der gegenüberliegenden Seiten;

260) der Unterschied der Winkel an der Grundlinie und das Verhältniß der Segmente;

261) der Winkel an der Spitze und das Verhältniß zwischen der Halbirungslinie desselben und der Höhe.

Anm. In den vorstehenden elf Aufgaben, deren Zahl sich leicht noch um ein Beliebiges vergrößern ließe, wird durch die gegebenen Stücke nur die Gestalt des Dreiecks bestimmt. Die Aufgaben sind also sämmtlich unbestimmt. Fügen wir nun zu den die Gestalt bestimmenden Stücken noch irgend eine Linie, etwa eine der acht folgenden:

1) Grundlinie,
2) Höhe,
3) Mittellinie,
4) Halbirungslinie des Winkels an der Spitze,
5) Unterschied der Segmente,
6) Umfang,
7) Radius des umschriebenen Kreises,
8) Radius des eingeschriebenen Kreises u. dgl. m.

hinzu, so erhalten wir 88 bestimmte Aufgaben.

Aufgabe 262—264. Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind

262) die Höhe und die Mittellinie für eine Seite *);

263) die Höhe und das auf eine Seite aus der gegenüberstehenden Ecke gefällte Loth;

264) das auf eine Seite aus der gegenüberstehenden Ecke gefällte Loth und der Radius des eingeschriebenen Kreises.

Aufgabe 265—274. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

265) die Grundlinie, die Mittellinie für dieselbe und die Mittellinie für eine Seite;

266) die Grundlinie und die Mittellinien für die Seiten;

267) die drei Mittellinien;

268) die Mittellinien für die beiden Seiten und die Höhe;

269) die Mittellinie und die aus den Endpunkten der Grundlinie auf die beiden Seiten gefällten Lothe;

270) die Mittellinie, die Höhe und das aus einem Endpunkte der Grundlinie auf die gegenüberliegende Seite gefällte Loth;

271) die Höhe, die Mittellinie für die Grundlinie und die Mittellinie für eine Seite;

272) der Winkel an der Spitze, die Mittellinie für die Grundlinie und die Mittellinie für eine Seite;

273) der Winkel an der Spitze und die Mittellinien für beide Seiten **);

---

*) Die Linie, welche die Mitte einer Seite mit der gegenüberstehenden Ecke verbindet.

**) Man gelangt zur Auflösung dieser Aufgabe, wenn man über der Mittellinie der einen Seite einen Kreisbogen beschreibt, welcher durch die Spitze des Dreiecks geht, und den Mittelpunkt dieses Bogens mit der Mitte der andern Seite und dem Endpunkte derselben, welchen sie mit der Grundlinie gemeinschaftlich hat, verbindet.

274) der Winkel an der Spitze, die Höhe und die Mittellinie für eine Seite (zwei Aufl.).

Aufgabe 275 — 277. Ein Viereck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

275) eine Seite, die Winkel an der gegenüberliegenden Seite und die Winkel, welche diese Seite mit den beiden Diagonalen bildet;

276) eine Seite, die Winkel, welche die gegenüberliegende Seite mit den beiden Diagonalen bildet, und die Winkel, welche die beiden andern Seiten mit einer Diagonale bilden;

277) eine Diagonale, drei Winkel des Vierecks und ein Winkel, welchen die andere Diagonale mit einer Seite bildet.

Anm. In diesen Aufgaben, welche sich leicht noch um ein Bedeutendes vermehren ließen, wird durch die vier gegebenen Winkel die Gestalt des Vierecks und durch Hinzufügung der einen Linie auch die Größe desselben bestimmt.

B. Vermischte Aufgaben.

Aufgabe 278. Eine gegebene Linie nach einem vorgeschriebenen Verhältnisse zu theilen.

Aufgabe 279. Eine Linie um ein gesuchtes Stück so zu verlängern, daß die Verlängerung und die ganze verlängerte Linie in einem vorgeschriebenen Verhältnisse stehen.

Aufgabe 280. Zwei gegebene Linien um ein gleiches Stück zu verlängern, so daß die ganzen verlängerten Linien ein vorgeschriebenes Verhältniß zu einander haben.

Aufgabe 281. Von zwei gegebenen Linien ein gleiches Stück abzuschneiden, so daß die übrig bleibenden Stücke in einem vorgeschriebenen Verhältnisse stehen.

Aufgabe 282 — 283. Zwischen den Schenkeln eines Winkels A ist ein Punkt P gegeben; man soll durch diesen Punkt eine die Schenkel des gegebenen Winkels in den Punkten X und Y schneidende Linie so legen, daß

282) die Abschnitte AX und AY ein vorgeschriebenes Verhältniß zu einander haben;

283) die Abschnitte PX und PY in einem vorgeschriebenen Verhältnisse zu einander stehen.

Aufgabe 284 — 285. Dieselben Aufgaben, jedoch mit der Abänderung, daß der Punkt P außerhalb der Schenkel des gegebenen Winkels liegt.

Aufgabe 286 — 287. Durch die Spitze C eines gegebenen Dreiecks ABC eine die Grundlinie AB nicht schneidende Linie so zu ziehen, daß, wenn man auf dieselbe aus den Endpunkten der Grundlinie A und B die Lothe AX und BY fällt:

286) die entstandenen Abschnitte CX inie verhalten sich wie ihre
benen Verhältnisse zu einander stehen; en sich Höhe und Grund-

287) die Lothe AX und BY ein vorgesc
einander haben. icher Höhe verhalten

Aufgabe 288 — 289. Dieselben Aufgaben, oder Dreiecke mit
mit der Abänderung, daß die gesuchte Linie die Grun — denn das
schneiden soll. alb so groß,

Aufgabe 290 — 292. In einem gegebenen Dreiec linie hat.
der Grundlinie AB eine Parallele, welche die Seiten in X und
schneidet, so zu ziehen, daß gleich,

290) die Summe der Abschnitte AX + BY einer gegebenen Lten, gleich wird;

291) der Unterschied dieser Abschnitte einer gegebenen Linie gleich wird;

292) das abgeschnittene Dreieck CXY einen vorgeschriebenen Umfang erhält.

Aufgabe 293 — 295. Dieselben Aufgaben, wie vorher, jedoch mit der Abänderung, daß die gesuchte Linie nicht die Seiten AC und BC selbst, sondern ihre über A und B fortgesetzten Verlängerungen schneiden soll.

Aufgabe 296 — 297. Durch den Berührungspunkt A zweier gegebenen Kreise eine dieselben in X und Y treffende Linie so zu ziehen, daß

296) AX + AY einer gegebenen Linie gleich wird;

297) AX — AY einer gegebenen Linie gleich wird.

Aufgabe 298. In einen Kreis ein Rechteck zu zeichnen, in welchem zwei zusammenstoßende Seiten ein vorgeschriebenes Verhältniß haben.

Aufgabe 299. In einen Halbkreis ein Quadrat zu zeichnen.

Aufgabe 300. In ein gegebenes Dreieck ein Quadrat zu zeichnen (so, daß zwei Ecken auf die Grundlinie und die beiden andern auf die Seiten des Dreiecks fallen).

Aufgabe 301. In ein gegebenes Dreieck ein Rechteck zu zeichnen, in welchem zwei zusammenstoßende Seiten ein vorgeschriebenes Verhältniß haben.

Aufgabe 302. In ein Quadrat ein Rechteck so zu zeichnen, daß die Ecken des Rechtecks auf die Seiten des Quadrats fallen und zwei zusammenstoßende Seiten desselben ein vorgeschriebenes Verhältniß haben.

Aufgabe 303. In ein gegebenes Viereck einen Rhombus zu zeichnen, dessen Seiten den Diagonalen des Vierecks parallel laufen.

Aufgabe 304. In einem Dreiecke einen Punkt so zu bestimmen, daß seine Abstände von den drei Seiten in vorgeschriebenen Verhältnissen zu einander stehen.

Aufgabe 305 — 306. Einen Kreis zu zeichnen, welcher

§ 203. Aufgabe.

Ueber eine gegebene Linie ab (Fig. 126) ein Dreieck so zu zeichnen, daß es einem gegebenen Dreiecke ABC ähnlich wird und die Seiten ab und AB in beiden eine gleiche Lage haben.

Aufl. Man trage an ab in den Endpunkten a und b die Winkel cab = CAB und cba = CBA an, so ist △ abc ∾ ABC nach § 190.

§ 204. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Linie ab (Fig. 130) ein Vieleck so zu zeichnen, daß es einem gegebenen Vielecke ABCDEF ähnlich wird und die Linie ab mit der Seite AB eine gleiche Lage erhält.

Aufl. Man zerschneide das gegebene Vieleck ABCDEF, durch Diagonalen aus der Ecke A gezogen, in Dreiecke und mache nach dem vorhergeh. § △ abc ∾ ABC, so daß die Seiten ab und AB eine gleiche Lage erhalten; ferner mache man auf gleiche Weise △ acd ∾ ACD, △ ade ∾ ADE und △ aef ∾ AEF, dann ist Vieleck ABCDEF ∾ abcdef nach § 197, 2.

Uebungsaufgaben.

A. Dreiecks- und Vierecksaufgaben.

Aufgabe 251 — 261. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

251) zwei Winkel;

252) ein Winkel und das Verhältniß der einschließenden Seiten;

253) das Verhältniß aller drei Seiten;

254) das Verhältniß zweier Seiten und ein Winkel an der dritten (zwei Aufl.);

255) der Winkel an der Spitze und das Verhältniß zwischen Höhe und Grundlinie;

256) der Winkel an der Spitze und das Verhältniß der Segmente;

257) der Winkel an der Spitze und das Verhältniß zwischen den aus den Endpunkten der Grundlinie auf die Seiten gefällten Lothe;

258) das Verhältniß der aus den drei Ecken auf die gegenüberstehenden Seiten gefällten Lothe;

259) der Unterschied der Winkel an der Grundlinie und das Verhältniß der gegenüberliegenden Seiten;

260) der Unterschied der Winkel an der Grundlinie und das Verhältniß der Segmente;

261) der Winkel an der Spitze und das Verhältniß zwischen der Halbirungslinie desselben und der Höhe.

Anm. In den vorstehenden elf Aufgaben, deren Zahl sich leicht noch um ein Beliebiges vergrößern ließe, wird durch die gegebenen Stücke nur die Gestalt des Dreiecks bestimmt. Die Aufgaben sind also sämmtlich unbestimmt. Fügen wir nun zu den die Gestalt bestimmenden Stücken noch irgend eine Linie, etwa eine der acht folgenden:

1) Grundlinie,
2) Höhe,
3) Mittellinie,
4) Halbirungslinie des Winkels an der Spitze,
5) Unterschied der Segmente,
6) Umfang,
7) Radius des umschriebenen Kreises,
8) Radius des eingeschriebenen Kreises u. dgl. m.

hinzu, so erhalten wir 88 bestimmte Aufgaben.

Aufgabe 262 — 264. Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind

262) die Höhe und die Mittellinie für eine Seite *);

263) die Höhe und das auf eine Seite aus der gegenüberstehenden Ecke gefällte Loth;

264) das auf eine Seite aus der gegenüberstehenden Ecke gefällte Loth und der Radius des eingeschriebenen Kreises.

Aufgabe 265 — 274. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

265) die Grundlinie, die Mittellinie für dieselbe und die Mittellinie für eine Seite;

266) die Grundlinie und die Mittellinien für die Seiten;

267) die drei Mittellinien;

268) die Mittellinien für die beiden Seiten und die Höhe;

269) die Mittellinie und die aus den Endpunkten der Grundlinie auf die beiden Seiten gefällten Lothe;

270) die Mittellinie, die Höhe und das aus einem Endpunkte der Grundlinie auf die gegenüberliegende Seite gefällte Loth;

271) die Höhe, die Mittellinie für die Grundlinie und die Mittellinie für eine Seite;

272) der Winkel an der Spitze, die Mittellinie für die Grundlinie und die Mittellinie für eine Seite;

273) der Winkel an der Spitze und die Mittellinien für beide Seiten **);

---

*) Die Linie, welche die Mitte einer Seite mit der gegenüberstehenden Ecke verbindet.

**) Man gelangt zur Auflösung dieser Aufgabe, wenn man über der Mittellinie der einen Seite einen Kreisbogen beschreibt, welcher durch die Spitze des Dreiecks geht, und den Mittelpunkt dieses Bogens mit der Mitte der andern Seite und dem Endpunkte derselben, welchen sie mit der Grundlinie gemeinschaftlich hat, verbindet.

274) der Winkel an der Spitze, die Höhe und die Mittellinie für eine Seite (zwei Aufl.).

Aufgabe 275 — 277. Ein Viereck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

275) eine Seite, die Winkel an der gegenüberliegenden Seite und die Winkel, welche diese Seite mit den beiden Diagonalen bildet;

276) eine Seite, die Winkel, welche die gegenüberliegende Seite mit den beiden Diagonalen bildet, und die Winkel, welche die beiden andern Seiten mit einer Diagonale bilden;

277) eine Diagonale, drei Winkel des Vierecks und ein Winkel, welchen die andere Diagonale mit einer Seite bildet.

Anm. In diesen Aufgaben, welche sich leicht noch um ein Bedeutendes vermehren ließen, wird durch die vier gegebenen Winkel die Gestalt des Vierecks und durch Hinzufügung der einen Linie auch die Größe desselben bestimmt.

B. Vermischte Aufgaben.

Aufgabe 278. Eine gegebene Linie nach einem vorgeschriebenen Verhältnisse zu theilen.

Aufgabe 279. Eine Linie um ein gesuchtes Stück so zu verlängern, daß die Verlängerung und die ganze verlängerte Linie in einem vorgeschriebenen Verhältnisse stehen.

Aufgabe 280. Zwei gegebene Linien um ein gleiches Stück zu verlängern, so daß die ganzen verlängerten Linien ein vorgeschriebenes Verhältniß zu einander haben.

Aufgabe 281. Von zwei gegebenen Linien ein gleiches Stück abzuschneiden, so daß die übrig bleibenden Stücke in einem vorgeschriebenen Verhältnisse stehen.

Aufgabe 282 — 283. Zwischen den Schenkeln eines Winkels A ist ein Punkt P gegeben; man soll durch diesen Punkt eine die Schenkel des gegebenen Winkels in den Punkten X und Y schneidende Linie so legen, daß

282) die Abschnitte AX und AY ein vorgeschriebenes Verhältniß zu einander haben;

283) die Abschnitte PX und PY in einem vorgeschriebenen Verhältnisse zu einander stehen.

Aufgabe 284 — 285. Dieselben Aufgaben, jedoch mit der Abänderung, daß der Punkt P außerhalb der Schenkel des gegebenen Winkels liegt.

Aufgabe 286 — 287. Durch die Spitze C eines gegebenen Dreiecks ABC eine die Grundlinie AB nicht schneidende Linie so zu ziehen, daß, wenn man auf dieselbe aus den Endpunkten der Grundlinie A und B die Lothe AX und BY fällt:

286) die entstandenen Abschnitte CX und CY in einem vorgeschriebenen Verhältnisse zu einander stehen;

287) die Lothe AX und BY ein vorgeschriebenes Verhältniß zu einander haben.

Aufgabe 288 — 289. Dieselben Aufgaben, wie vorher, jedoch mit der Abänderung, daß die gesuchte Linie die Grundlinie AB durchschneiden soll.

Aufgabe 290 — 292. In einem gegebenen Dreiecke ABC mit der Grundlinie AB eine Parallele, welche die Seiten in X und Y durchschneidet, so zu ziehen, daß

290) die Summe der Abschnitte AX + BY einer gegebenen Linie gleich wird;

291) der Unterschied dieser Abschnitte einer gegebenen Linie gleich wird;

292) das abgeschnittene Dreieck CXY einen vorgeschriebenen Umfang erhält.

Aufgabe 293 — 295. Dieselben Aufgaben, wie vorher, jedoch mit der Abänderung, daß die gesuchte Linie nicht die Seiten AC und BC selbst, sondern ihre über A und B fortgesetzten Verlängerungen schneiden soll.

Aufgabe 296 — 297. Durch den Berührungspunkt A zweier gegebenen Kreise eine dieselben in X und Y treffende Linie so zu ziehen, daß

296) AX + AY einer gegebenen Linie gleich wird;

297) AX — AY einer gegebenen Linie gleich wird.

Aufgabe 298. In einen Kreis ein Rechteck zu zeichnen, in welchem zwei zusammenstoßende Seiten ein vorgeschriebenes Verhältniß haben.

Aufgabe 299. In einen Halbkreis ein Quadrat zu zeichnen.

Aufgabe 300. In ein gegebenes Dreieck ein Quadrat zu zeichnen (so, daß zwei Ecken auf die Grundlinie und die beiden andern auf die Seiten des Dreiecks fallen).

Aufgabe 301. In ein gegebenes Dreieck ein Rechteck zu zeichnen, in welchem zwei zusammenstoßende Seiten ein vorgeschriebenes Verhältniß haben.

Aufgabe 302. In ein Quadrat ein Rechteck so zu zeichnen, daß die Ecken des Rechtecks auf die Seiten des Quadrats fallen und zwei zusammenstoßende Seiten desselben ein vorgeschriebenes Verhältniß haben.

Aufgabe 303. In ein gegebenes Viereck einen Rhombus zu zeichnen, dessen Seiten den Diagonalen des Vierecks parallel laufen.

Aufgabe 304. In einem Dreiecke einen Punkt so zu bestimmen, daß seine Abstände von den drei Seiten in vorgeschriebenen Verhältnissen zu einander stehen.

Aufgabe 305 — 306. Einen Kreis zu zeichnen, welcher

305) durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene gerade Linie berührt;

306) zwei gegebene gerade Linien berührt und durch einen gegebenen Punkt geht. *)

Elfter Abschnitt.

Von den Verhältnissen der Figuren.

§ 205. Lehrsatz.

Rechtecke mit gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien.

Beweis. Die gegebenen Rechtecke seien ABCD und EFGH (Fig. 139) mit den gleichen Höhen AD und EH; um nun zu zeigen, daß sich die beiden Rechtecke wie ihre Grundlinien AB und EF verhalten, bestimme ich zuerst das Verhältniß dieser beiden Grundlinien und nehme an, es verhalte sich

$$AB : EF = 5 : 3,$$

d. h. es giebt eine dritte Linie, welche in AB fünfmal und in EF dreimal enthalten ist. Diese Linie trage ich nun auf AB und EF auf und ziehe durch die Theilungspunkte Parallelen mit den Höhen, so theilen diese das Rechteck ABCD in fünf und EFGH in drei kleinere Rechtecke, welche alle unter sich gleich sind, weil sie gleiche Höhe und Grundlinie haben. Demnach verhält sich Rechteck

$$ABCD : EFGH = 5 : 3.$$

Nach unserer Annahme verhielt sich aber auch

$$AB : EF = 5 : 3;$$

folglich verhält sich $ABCD : EFGH = AB : EF$.

Anm. Um dem obigen Beweise das Ansehn größerer Allgemeinheit zu geben, kann man auch (so wie in § 181) statt der bestimmten Zahlen die allgemeinen Zeichen m und n setzen, alles Andere aber unverändert beibehalten. Eben so kann man sich auch durch dasselbe Verfahren, wie dort, von der Richtigkeit unseres Satzes überzeugen, wenn AB und EF incommensurabel sein sollten.

§ 206. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden Satze folgt weiter:

*) Die Auflösung dieser Aufgabe läßt sich leicht auf die vorhergehende zurückführen.

1) Rechtecke mit gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen; — denn in jedem Rechtecke lassen sich Höhe und Grundlinie vertauschen.

2) Parallelogramme oder Dreiecke mit gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien und Parallelogramme oder Dreiecke mit gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen; — denn das Parallelogramm ist gerade so groß und das Dreieck halb so groß, als ein Rechteck, welches mit ihm gleiche Höhe und Grundlinie hat.

3) Zwei Rechtecke ABCD und EFGH (Fig. 140) sind gleich, wenn sich ihre Grundlinien umgekehrt wie ihre Höhen verhalten, wenn sich also verhält:

$$AB : EF = EH : AD.$$

Denn wenn wir AD = EK machen und KL || EF ziehen, so entsteht ein Rechteck EFLK, welches mit ABCD gleiche Höhe und mit EFGH gleiche Grundlinie hat; es verhält sich folglich nach dem vorhergeh. § $ABCD : EFLK = AB : EF$
und nach Nr. 1 $EFGH : EFLK = EH : EK.$

Nach der Annahme ist aber

$$AB : EF = EH : AD = EH : EK,$$

folglich verhält sich

$$ABCD : EFLK = EFGH : EFLK;$$

daher ist $ABCD = EFGH.$

4) Dieselbe Behauptung gilt vermöge der in (2) angegebenen Gründe auch von allen Parallelogrammen und Dreiecken. — Weiter folgt aus Nr. 3

5) Ein Quadrat und ein Rechteck sind gleich, wenn die Seite des Quadrats die mittlere Proportionale zwischen zwei zusammenstoßenden Seiten des Rechtecks ist, woraus sich die Analogie zwischen den §§ 170, 171 und § 199, 4 und 6 erklärt.

*§ 207. Lehrsatz.

In jedem rechtwinkligen Dreieck (ABC, Fig. 115) verhalten sich die Quadrate der Catheten zu einander und zu dem Quadrate der Hypotenuse wie die Segmente der Hypotenuse zu einander und zur ganzen Hypotenuse.

Beweis. Nach § 170 ist das Quadrat ABFG = dem Rechtecke BLME und das Quadrat ACHK = dem Rechtecke CDML. Nun haben aber die beiden Rechtecke BLME und CDML und das Quadrat BCDE einerlei Höhe und verhalten sich daher wie ihre

Grundlinien BL, CL und BC; folglich verhalten sich auch die drei Quadrate ABFG, ACHK und BCDE wie diese drei Linien.

*§ 208. Lehrsatz.

Bilden vier Linien a, b, c und d (Fig. 141) eine Proportion, so bilden auch ihre Quadrate, welche wir der Kürze wegen mit a_q, b_q, c_q und d_q bezeichnen wollen, eine Proportion.

Beweis. Man schneide von dem Quadrate b_q ein Rechteck ab, welches zur Höhe die Seite a hat; dieses Rechteck sei mit (ab) bezeichnet; eben so schneide man von dem Quadrate d_q das Rechteck (cd) ab. Dann verhält sich

$$a_q:(ab) = a:b \text{ und } c_q:(cd) = c:d;$$

folglich da nach der Voraussetzung $a:b = c:d$ ist:

$$a_q:(ab) = c_q:(cd),$$

oder wenn wir die Mittelglieder vertauschen,

$$1)\quad a_q:c_q = (ab):(cd).$$

Weiter verhält sich

$$b_q:(ab) = b:a \text{ und } d_q:(cd) = d:c;$$

folglich auch, da $b:a = d:c$ vorausgesetzt ist:

$$b_q:(ab) = d_q:(cd)$$

oder

$$2)\quad b_q:d_q = (ab):(cd).$$

Aus (1) und (2) ergiebt sich

$$3)\quad a_q:c_q = b_q:d_q \text{ oder } a_q:b_q = c_q:d_q.$$

Anm. Wenn sich z. B. verhält $a:b = c:d = 2:3$, so verhält sich $a_q:b_q = c_q:d_q = 4:9$. (Siehe unten § 219.)

§ 209. Lehrsatz.

Aehnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten.

Beweis. Die ähnlichen Dreiecke seien ABC und abc (Fig. 142) und über den gleichliegenden Seiten AB und ab seien die Quadrate ABDE und abde gezeichnet. Um nun zu zeigen, daß sich die gegebenen Dreiecke wie diese Quadrate verhalten, ziehen wir durch C und c Parallelen mit AB und ab, welche die verlängerten Seiten AE und BD und ae und bd in den Punkten F und G und f und g schneiden. Dann verhält sich nach § 206, 1

$$1)\quad ABGF:ABDE = AF:AE = AF:AB,$$

und

$$2)\quad abgf:abde = af:ae = af:ab.$$

Nach § 196 verhalten sich aber in ähnlichen Dreiecken die Höhen wie die Grundlinien, also

3) AF : AB = af : ab,

und folglich verhält sich vermöge (1) und (2)

4) ABGF : ABDE = abgf : abde,

oder wenn wir die Mittelglieder vertauschen,

5) ABGF : abgf = ABDE : abde.

Die Dreiecke ABC und abc sind aber die Hälften der Rechtecke ABGF und abgf; folglich verhält sich auch

6) △ ABC : abc = □ ABDE : abde, w. z. e. w.

§ 210. Lehrsatz.

Ueberhaupt verhalten sich ähnliche Vielecke ABCDEF und abcdef (Fig. 130) wie die Quadrate zweier gleichliegenden Seiten, z. B. wie $AB_q : ab_q$.

Beweis. Wenn wir die Vielecke durch Diagonalen aus ein Paar gleichliegenden Ecken A und a gezogen in Dreiecke zerschneiden, so sind nach § 197 die entstandenen Dreiecke ähnlich, also △ ABC ∾ abc, ACD ∾ acd u. s. w. Demnach verhält sich zu Folge des vorherg. §

$\triangle\ ABC : abc = AC_q : ac_q$

und auch $\triangle\ ACD : acd = AC_q : ac_q$,

folglich $\triangle\ ABC : abc = ACD : acd$.

Es verhalten sich also die gleichliegenden Dreiecke ABC und abc gerade so, wie die gleichliegenden Dreiecke ACD und acd, und da dasselbe eben so von allen folgenden Dreiecken gilt, so werden wir folglich setzen können:

△ ABC : abc = ACD : acd = ADE : ade = AEF : aef.

Wenn aber mehrere Verhältnisse als gleich gegeben sind, so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede, also

ABC + ACD + ADE + AEF : abc + acd + ade + aef = ABC : abc.

Statt der ersten Summe kann ich Vieleck ABCDEF und statt der andern Summe Vieleck abcdef, ferner statt des Verhältnisses △ ABC : abc kann ich nach dem vorherg. § auch $AB_q : ab_q$ setzen. Hiernach verwandelt sich die letzte Proportion in:

$ABCDEF : abcdef = AB_q : ab_q$, w. z. e. w.

§ 211. Lehrsatz.

1) Regelmäßige Vielecke von gleicher Seitenzahl verhalten sich wie die Quadrate der Radien der umschriebenen Kreise.

2) Die Flächen zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate der Radien oder Durchmesser.

Beweis. 1) Wenn man in zwei regelmäßigen Vielecken von gleicher Seitenzahl (Fig. 131) die Mittelpunkte M und m mit den Endpunkten zweier Seiten AB und ab verbindet, so verhalten sich die beiden Vielecke offenbar zu einander eben so wie die entstandenen Dreiecke AMB und amb, und da diese sich nach § 209 wie AM_q: am_q verhalten, so muß dasselbe auch von den Vielecken selbst gelten.

2) Die Richtigkeit der zweiten Behauptung folgt aus Nr. 1, indem wir uns die Kreise als ähnliche regelmäßige Vielecke von unendlich vielen Seiten denken.

Anm. 1. Wenn wir also den Durchmesser eines Kreises verdoppeln oder verdreifachen, so wird die Kreisfläche 4mal oder 9mal größer u. s. w.

Anm. 2. Aus § 208 folgt noch leicht, daß sich regelmäßige Vielecke von gleicher Seitenzahl auch wie die Quadrate der Radien der eingeschriebenen Kreise verhalten.

§ 212. Lehrsatz.

1) Wenn man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Vielecke in ähnlicher Lage zeichnet, so ist das über der Hypotenuse gezeichnete so groß, als die über den Catheten gezeichneten zusammen.

2) Wenn man mit den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, als Radien oder Durchmesser, Kreise beschreibt, so ist die Fläche des mit der Hypotenuse beschriebenen Kreises so groß, als die beiden andern Kreisflächen zusammen.

Beweis. 1) Die ähnlichen Vielecke verhalten sich eben so zu einander, wie die Quadrate der gleichliegenden Seiten; da nun das Quadrat der Hypotenuse so groß ist, als die Quadrate der Catheten zusammen, so muß auch das Vieleck über der Hypotenuse so groß sein, als die Vielecke über den Catheten zusammen.

2) Die Richtigkeit der andern Behauptung folgt eben so aus dem pythagoräischen Lehrsatze, da sich Kreise wie die Quadrate ihrer Radien oder Durchmesser verhalten.

Anm. Hieraus ergiebt sich auch noch leicht der Satz von der Monden des Hippokrates. Hat man nehmlich über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks Halbkreise beschrieben (Fig. 143), so sind die beiden mondförmigen Figuren α und β zusammen so groß, als das Dreieck γ. Denn nach dem vorherg. § ist der Halbkreis über der Hypotenuse, $\gamma + \delta + \varepsilon$, so groß, als die Halbkreise über den Catheten, $\alpha + \delta$ und $\beta + \varepsilon$, zusammen genommen, also $\gamma + \delta + \varepsilon = \alpha + \delta + \beta + \varepsilon$ und folglich $\gamma = \alpha + \beta$.

*§ 212. Lehrsatz.

Parallelogramme oder Dreiecke, welche einen gleichen Winkel haben, verhalten sich wie die Rechtecke der diesen Winkel einschließenden Seiten.

Beweis. Die gegebenen Parallelogramme seien ABCD und EFGH (Fig. 144) mit den gleichen Winkeln DAB und HEF; das Rechteck aus den Seiten AB u. AD (= AL) sei ABKL, und das Rechteck aus den Seiten EF u. EH (= EN) sei EFMN; so soll bewiesen werden, daß sich verhält

$$AC : EG = AK : EM.$$

Da AC u. AK dieselbe Grundlinie haben, so verhalten sie sich wie ihre Höhen BO : BK, oder da AL = AD und daher auch BK = BC ist, wie BO : BC. Demnach verhält sich

$$1)\ AC : AK = BO : BC.$$

Ganz eben so finden wir

$$2)\ EG : EM = FP : FG.$$

Nun ist aber $\triangle$ BOC $\sim$ FPG, da Winkel $O = P = 90^0$ und nach der Voraussetzung auch Winkel $C = G$ ist; daher verhält sich

$$3)\ BO : BC = FP : FG.$$

Verbinden wir diese Proportion mit (1) u. (2), so ergiebt sich

$$4)\ AC : AK = EG : EM,$$

oder wenn wir die Mittelglieder vertauschen:

$$5)\ AC : EG = AK : EM.$$

Dasselbe gilt auch von zwei Dreiecken mit einem gleichen Winkel, da sie die Hälften von Parallelogrammen sind, welche mit ihnen diesen Winkel und die den Winkel einschließenden Seiten gemeinschaftlich haben.

Anm. Daß der Beweis derselbe bleibt, wenn in den gegebenen Parallelogrammen AC u. EG zwei stumpfe Winkel D u. H als gleich vorausgesetzt sind, fällt unmittelbar in die Augen.

§ 213. Aufgabe.

1) Wenn zwei ähnliche Vielecke gegeben sind, ein drittes zu zeichnen, welches ihrer Summe oder Differenz gleich ist.

2) Einen Kreis zu zeichnen, dessen Fläche der Summe oder Differenz der Flächen zweier gegebenen Kreise gleich ist.

Die Auflösungen sind vermöge § 210 und 211 dieselben wie von § 179.

§ 214. Aufgabe.

1) Ein Quadrat zu zeichnen, welches zu einem gegebenen

Quadrate ein vorgeschriebenes Verhältniß hat, z. B. sich wie 5:3 verhält.

2) Ein Vieleck zu zeichnen, welches einem gegebenen ähnlich ist und zu demselben ein vorgeschriebenes Verhältniß hat.

3) Einen Kreis zu zeichnen, dessen Fläche zur Fläche eines gegebenen Kreises ein vorgeschriebenes Verhältniß hat.

Aufl. 1) Wenn man zunächst eine Linie sucht, welche zu der Seite a des Quadrats das vorgeschriebene Verhältniß 5:3 hat und sich aus a und $\frac{5}{3}$a ein Rechteck gebildet denkt, so hat offenbar dieses Rechteck zu dem gegebenen Quadrate das vorgeschriebene Verhältniß (5:3). Man hat daher nur noch nöthig, dieses Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln, indem man die mittlere Proportionale zwischen a und $\frac{5}{3}$a sucht.

Die Auflösung von Nro. 2 u. 3 wird vermöge § 210 u. § 211 eben so erhalten.

Anm. Die Seite eines Quadrats, welches doppelt so groß ist, als ein gegebenes, findet man, wenn man die Diagonale zieht, und die Seite des halb so großen Quadrats wird erhalten, wenn man die Diagonale halbirt. — Halbirt man dagegen die Seite des gegebenen Quadrats, so ist das Quadrat dieser Hälfte nur $\frac{1}{4}$ des gegebenen.

*§ 215. Aufgabe.

Ein Dreieck ABC (Fig. 145) durch Linien, welche der Grundlinie AB parallel laufen, in eine vorgeschriebene Anzahl, z. B. drei gleiche Theile zu theilen.

Die Auflösung dieser Aufgabe ist eigentlich schon in Nro. 2 des vorherg. § enthalten, soll jedoch um größerer Deutlichkeit Willen hier noch ausführlich mitgetheilt werden.

Ueber einer Seite AC des Dreiecks ABC beschreibe man einen Halbkreis, theile die Seite AC in drei gleiche Theile, errichte in den Theilungspunkten D u. E die Lothe DF u. EG, ziehe CF u. CG, mache CF = CH und CG = CK und ziehe endlich durch H u. K mit der Grundlinie AB die Parallelen HL u. KM, so theilen diese das gegebene Dreieck ABC in drei gleiche Theile.

Beweis. Denn da $\triangle$ ABC $\sim$ HLC ist, so verhält sich nach § 209

$$\triangle\, ABC : HLC = AC_q : CH_q = AC_q : CF_q.$$

Weiter ist aber, wenn wir uns AF gezogen denken, Winkel AFC = 90°, und es verhält sich daher nach § 207

$$AC_q : CF_q = AC : CD = 3 : 1,$$

also auch

$$\triangle\, ABC : HLC = 3 : 1.$$

Demnach ist Dreieck HLC der dritte Theil des Dreiecks ABC. — Eben so wird erwiesen, daß Dreieck CKM = $^2/_3$ Dreieck ABC ist.

*§ 216. Aufgabe.

Ein Vieleck zu zeichnen, welches einem gegebenen Vielecke A gleich und einem andern gegebenen Vielecke B ähnlich ist (Fig. 146).

Analysis. Denken wir uns die Aufgabe bereits gelöst und X als das verlangte Vieleck erhalten und bezeichnen mit b u. x zwei gleichliegende Seiten in den ähnlichen Vielecken B u. X, so muß sich nach § 210 verhalten:

$$B : X = b_q : x_q,$$

oder da X = A sein soll:

$$B : A = b_q : x_q.$$

Verwandeln wir nun nach § 178 die Vielecke B u. A in Quadrate und nennen die Seiten derselben β u. α, so geht die letzte Proportion über in $\beta_q : \alpha_q = b_q : x_q.$

Hieraus ergiebt sich die folgende

Aufl. Man verwandle A u. B in Quadrate, deren Seiten α u. β heißen sollen, suche nach § 201 die vierte Proportionale x zu β, α u. b, so daß sich verhält

$$\beta : \alpha = b : x,$$

und zeichne endlich nach § 204 über x ein Vieleck X, welches dem Vielecke B ähnlich ist und als gleichliegende Seiten mit b die Seite x hat, so ist Vieleck X das verlangte, d. h. gleich A.

Der Beweis ist in der Analysis enthalten,

Anm. Diese sehr allgemeine Aufgabe, bei welcher, wenn auch nicht unmittelbar, doch mittelbar fast alle früheren Sätze zur Anwendung kommen, kann wohl als das Höchste desjenigen angesehen werden, was mit den bis hierher erworbenen Kenntnissen zu leisten sein dürfte. — Mit Hilfe derselben läßt sich z. B. jede beliebige geradlinige Figur in ein gleichseitiges Dreieck, in ein regelmäßiges Sechseck u. dgl. verwandeln.

Uebungsaufgaben.

Aufgabe 307—309. Eine gegebene Linie so zu theilen, daß

307) die Quadrate beider Theile in einem vorgeschriebenen Verhältnisse zu einander stehen;

308) daß die Summe,

309) der Unterschied dieser Quadrate einem gegebenen Quadrate gleich wird.

Aufgabe 310—312. Eine gegebene Linie so zu verlängern, daß die Bedingungen der vorhergehenden Aufgaben von dem Quadrate der Verlängerung und dem Quadrate der ganzen verlängerten Linie erfüllt werden.

Aufgabe 313—314. Ein gegebenes Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, so daß

313) die zusammenstoßenden Seiten ein vorgeschriebenes Verhältniß haben;

314) sich um eine gegebene Linie von einander unterscheiden.

Aufgabe 315. Ein gegebenes Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln, so daß der Winkel an der Spitze ungeändert bleibt.

Aufgabe 316. Ein gegebenes Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

Aufgabe 317. Ein gegebenes Dreieck so umzuwandeln, daß es einem gegebenen Dreiecke ähnlich wird.

Aufgabe 318—322. Ein Dreieck in zwei Stücke zu zerschneiden, welche in einem vorgeschriebenen Verhältnisse stehen, durch eine Linie, welche

318) durch die Spitze des Dreiecks geht;

319) durch eine Linie, welche durch einen auf einer Seite gegebenen Punkt geht;

320) durch eine Linie, welche durch einen innerhalb des Dreiecks gegebenen Punkt geht;

321) durch eine Linie, welche durch einen außerhalb des Dreiecks gegebenen Punkt geht;

322) durch eine Linie, welche einer gegebenen Linie parallel ist.

Aufgabe 323—327. Dieselben Aufgaben für ein Trapez.

Aufgabe 328—332. Dieselben Aufgaben für ein beliebiges Viereck oder Vieleck.

Aufgabe 333. In einem gegebenen Dreiecke einen Punkt so zu bestimmen, daß Linien, aus diesem Punkte nach den Ecken des Dreiecks gezogen, dasselbe in drei Stücke zerschneiden, welche in einem vorgeschriebenen Verhältnisse zu einander stehen.

Aufgabe 334—335. Die Fläche eines Kreises durch einen concentrischen Kreis

334) zu halbiren;

335) nach einem vorgeschriebenen Verhältnisse zu theilen.

Zwölfter Abschnitt.

Von der Ausmessung der geradlinigen Figuren und des Kreises.

A. Geradlinige Figuren.

§ 217. Erklärung.

Wenn man eine Figur durch eine andere als Einheit gemessen hat und dann die ausgemessene Figur (ihrer Größe nach) als benannte Zahl ausdrückt, so nennt man diese benannte Zahl den Inhalt der Figur. — Als Einheit nimmt man gewöhnlich ein Quadrat an.

Anm. Zu Folge dieser Erklärung ist also der Inhalt einer Figur (z. B. acht Quadratfuß) — so wie jede benannte Zahl — ein zusammengesetzter Ausdruck, in welchem sowohl angegeben ist, mit welcher Einheit (Quadratfuß) man die zu messende Figur verglichen hat, als auch, wie oft (achtmal) die Einheit in derselben enthalten ist.

Bemerkung. So wie Linien nur wieder durch Linien, so können auch natürlich Figuren nur durch Figuren gemessen werden. Während man jedoch Linien durch unmittelbares, wiederholtes Auftragen der Längeneinheit auszumessen pflegt, sucht man den Inhalt einer Figur in der Regel nicht durch unmittelbares Auftragen der Flächeneinheit (z. B. des Quadratfußes), sondern mittelbar dadurch zu erhalten, daß man bestimmte in der Figur vorkommende Linien wirklich durch die Längeneinheit (z. B. den Fuß) mißt und aus den Maaßzahlen dieser Linien die Zahl für den Inhalt der Figur berechnet. Die Regeln, nach welchen man hierbei zu verfahren hat, zu ermitteln, ist die Aufgabe dieses Abschnitts. — Hierbei wird jedoch durchgehends vorausgesetzt, daß man die Linien, welche die Größe einer Figur bestimmen, durch die Seite des als Flächeneinheit angenommenen Quadrats gemessen hat, und daß sich also die Maaßzahlen jener Linien auf diese Seite, als Längeneinheit, beziehen. (Wenn man also z. B. wissen will, wie viele Quadratfuß eine Figur enthält, so müssen auch die Linien, aus denen der gesuchte Inhalt berechnet werden soll, sämmtlich in Fußen, nicht z. B. die einen in Fußen, die andern in Zollen ausgedrückt sein.)

Anm. Als Längeneinheit nimmt man gewöhnlich den preußischen oder rheinländischen Fuß an. Zwölf dieser Fuß bilden eine

Ruthe. Den zwölften Theil des Fußes nennt man einen Zoll und den zwölften Theil des Zolles eine Linie. — Diese Eintheilung heißt die Duodecimaleintheilung und wird besonders im bürgerlichen Verkehr gebraucht (Werkmaaß). Eine andere Eintheilung, deren sich hauptsächlich die Feldmesser bedienen, ist die Decimaleintheilung, welche mit der vorhergehenden nur in der Größe der Ruthe übereinstimmt, in den übrigen Bestimmungen aber abweicht, indem hier die Ruthe in zehn Fuß, der Fuß in zehn Zoll, der Zoll in zehn Linien eingetheilt wird. — Bei beiden Eintheilungen bezeichnet man der Kürze wegen

eine Ruthe, einen Fuß, einen Zoll, eine Linie
durch 1^0, $1'$, $1''$, $1'''$.

Die Fläche mißt man durch die Quadrate dieser Linien und bezeichnet eine Quadratruthe, einen Quadratfuß, einen Quadratzoll, eine Quadratlinie beziehlich durch

$$1\square^0,\quad 1\square',\quad 1\square'',\quad 1\square'''.$$

Es ist aber in der Duodecimaleintheilung

$$1\square^0 = 144\square',\quad 1\square' = 144\square'',\quad 1\square'' = 144\square'''$$

und in der Decimaleintheilung

$$1\square^0 = 100\square',\quad 1\square' = 100\square'',\quad 1\square'' = 100\square'''.$$

Die Decimaleintheilung hat vor der andern den Vorzug, daß das Geschäft des sogenannten Reducirens sich ohne alle Mühe ausführen läßt; so sind z. B. nach derselben

$$7^0\ 8'\ 3'\ 5'' = 7835''' = 783{,}5'' = 78{,}35' = 738{,}5^0$$

und

$$5\square'\ 37\square''\ 9\square''' = 53709\square''' = 537{,}09\square'' = 5{,}3709\square'.$$

Will man Angaben nach der einen Eintheilung in die andere umsetzen, so hat man sich nur zu erinnern, daß für beide die Größe der Ruthe dieselbe ist.

Von andern Maaßen, welche häufig Anwendung finden, ist eine preußische Elle = $2\frac{1}{8}$ rheinl. Fuß = $25\frac{1}{2}$ Zoll, eine preuß. Meile = 2000 Ruthen = 24000 rheinl. Fuß, eine Reisestunde, deren 5 = 3 Meilen sind, = 1200 Ruthen = 14400 rheinl. Fuß, eine geographische Meile, deren 15 auf einen Grad des Aequators gehen, = 23642 rheinl. Fuß *), ein preuß. Morgen = 180 □Ruthen; — ferner ein Meter = 3,186 rheinl. Fuß, ein Decimeter = $\frac{1}{10}$ Meter = 3,823 Zoll, ein Centimeter = $\frac{1}{100}$ Meter = 4,588 Linien, ein Millimeter = $\frac{1}{1000}$ Meter = 0,4588 Linien.

---

*) Im gewöhnlichen Leben ist auch noch häufig von einer deutschen Meile die Rede; soll diese einerlei sein mit der geographischen, so ist sie nicht, wie man oft behaupten hört, größer, sondern zu Folge des Obigen um 3,58 Fuß kleiner, als die preußische Meile. Will man aber unter einer deutschen Meile zwei Reisestunden verstanden haben, dann würden solcher Meilen ohngefähr $12\frac{1}{2}$ auf einen Grad des Aequators gehen, und dieselbe würde dann allerdings sowohl die geographische, als auch die preußische Meile um ein Beträchtliches übertreffen.

§ 218. Lehrsatz.

Die Zahl für den Inhalt eines Rechtecks wird gefunden, wenn man die Maaßzahl der Grundlinie mit der Maaßzahl der Höhe multiplicirt.

Wenn also z. B. die Seite des als Einheit angenommenen Quadrats Q (Fig. 147) in der Grundlinie des auszumessenden Rechtecks ABCD fünfmal und in der Höhe dreimal enthalten ist, so ist die Zahl für den gesuchten Inhalt

$$J = 3.5 = 15;$$

oder allgemeiner, wenn überhaupt die Maaßzahlen der Grundlinie und Höhe durch g und h bezeichnet werden:

$$J = g.h.$$

Beweis. Man schneide von der Grundlinie und Höhe des Rechtecks ABCD aus der nehmlichen Ecke A zwei Stücke AE und AF gleich mit der Seite des gegebenen Quadrats Q ab und ziehe durch die Punkte E und F Parallelen mit den Seiten des Rechtecks, so entsteht ein neues Rechteck ABGF und ein Quadrat AEHF, welches dem gegebenen Quadrate Q gleich ist. Das Rechteck ABGF hat mit dem gegebenen Rechtecke ABCD gleiche Grundlinie und mit dem Quadrate Q gleiche Höhe; es läßt sich daher nach § 205 und § 206 mit beiden Figuren vergleichen. Bezeichnen wir, um abzukürzen, das Rechteck ABCD mit R und das Rechteck ABGF mit S, so müssen sich die Rechtecke R und S, da sie einerlei Grundlinie haben, wie ihre Höhen AD und AF verhalten, und da sich nach der Annahme AD zu AF wie 3 zu 1 verhält, so verhält sich folglich auch 1) $R:S = 3:1$.

Das Rechteck S und das Quadrat Q haben gleiche Höhe und verhalten sich folglich wie ihre Grundlinien AB und AE, und da zu Folge der Annahme $AB:AE = 5:1$ ist, so verhält sich folglich auch 2) $S:Q = 5:1$.

Aus der ersten Proportion folgt

$$R = 3.S$$

und aus der zweiten: $S = 5.Q$,

folglich ist: $R = 3.5.Q = 15.Q$,

also die Zahl für den Inhalt des auszumessenden Rechtecks

$$J = 3.5 = 15.$$

Anm. 1. Um größerer Anschaulichkeit willen hat man in dem vorstehenden Beweise für die Maaßzahlen der Grundlinie und Höhe zwei bestimmte Zahlen 5 und 3 gesetzt. Man kann indeß statt dieser bestimmten Zahlen auch die allgemeinen Zeichen g und h setzen und im Uebrigen

den Beweis buchstäblich beibehalten. Dieser Beweis gilt also nicht bloß für den Fall, daß g und h ganze Zahlen sind, sondern er umfaßt auch alle diejenigen Fälle, in welchen die Maaßzahlen der Grundlinie und Höhe gebrochene Zahlen sind.

Anm. 2. Ist von einem Rechtecke die Grundlinie = 5′ 7″ und die Höhe = 4′ 3″ (Werkmaaß) gegeben, so hat man zunächst diese Zahlen auf die nehmliche Einheit, z. B. den Zoll, zurückzuführen, und also

$$5' \, 7'' = 67'' \text{ und } 4' \, 3'' = 51''$$

zu setzen; dann ist der gesuchte Inhalt des Rechtecks

$$= 67 \,.\, 51 \square'' = 3417 \square'' = 23 \square' \; 105 \square''.$$

Bemerkung. Der vorhergehende Lehrsatz wird gewöhnlich kurz so ausgesprochen: „Der Inhalt eines Rechtecks wird gefunden, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplicirt.“ — In ähnlicher abgekürzter Art sind auch die nächstfolgenden Sätze ausgedrückt.

Eben so wird man im Folgenden der Kürze wegen häufig Linien und ihre Maaßzahlen durch die nehmlichen Buchstaben bezeichnen und eine Linie, welche die Maaßzahl a hat, auch kurzweg die Linie a nennen. Diese doppelte Bedeutung der nehmlichen Zeichen kann jedoch keine Mißverständnisse herbeiführen, wenn man nur festhält, daß in der Rechnung alle Buchstaben allein Zahlen, niemals die Größen selbst vorstellen. — In der Figur dagegen hat man unter den Buchstaben die Größen selbst (Linien oder Flächen) zu verstehen.

§ 219. Zusatz.

Aus den vorherg. §§ und den §§ 163 — 166 folgt:

1) Der Inhalt (J) eines Quadrats wird gefunden, wenn man eine Seite (a) mit sich selbst multiplicirt, also

$$J = a^2.$$

2) Der Inhalt (J) eines Parallelogramms ist gleich dem Product aus der Grundlinie (g) und der Höhe (h), also

$$J = g \,.\, h.$$

3) Der Inhalt (J) eines Dreiecks ist gleich dem halben Producte aus der Grundlinie (g) und der Höhe (h), also

$$J = \tfrac{1}{2} g \,.\, h.$$

4) Der Inhalt (J) eines Trapezes wird gefunden, wenn man die mittlere Länge, (d. h. die halbe Summe der beiden parallelen Seiten a und b), mit der Höhe (h) multiplicirt, also

$$J = \tfrac{1}{2}(a + b) \,.\, h.$$

Anm. Wenn z. B. die Seite eines Quadrates a = 7 gegeben ist, so ist der Inhalt J = 7 . 7 = 49.

Wenn ferner von einem Parallelogramme die Grundlinie $g = 12$ und die Höhe $h = 8$ gegeben ist, so ist der Inhalt $J = 8 . 12 = 96$;

Ist von einem Dreiecke die Grundlinie $g = 5$ und die Höhe $h = 9$ gegeben, so ist der Inhalt $J = \frac{1}{2} . 5 . 9 = 22\frac{1}{2}$.

Wenn endlich von einem Trapeze die eine Parallele $a = 10$, die andere $b = 7$, also die mittlere Länge $= 8\frac{1}{2}$ und die Höhe $h = 6$ gegeben ist, so ist der Inhalt $J = 51$.

B. Kreis.

§ 220. Erklärung.

Zu Folge § 198,2 findet bei allen Kreisen das nehmliche Verhältniß zwischen Peripherie und Durchmesser statt. Man bezeichnet dieses unveränderliche Verhältniß mit π und hat also unter π diejenige Zahl zu verstehen, welche anzeigt, wie oft der Durchmesser in der Peripherie enthalten ist. Diese Verhältnißzahl ist jedoch irrational und kann folglich nicht ganz genau, sondern nur näherungsweise dargestellt werden. Ein solcher Näherungswerth ist z. B. $\frac{22}{7}$ *); noch genauer ist der Decimalbruch 3,14159265..

Anm. Der Näherungswerth $\frac{22}{7}$ ist zuerst von Archimedes aufgefunden worden, indem er den Umfang in und um den Kreis beschriebener Vielecke berechnete und hierdurch Grenzen erhielt, zwischen denen die gesuchte Verhältnißzahl liegt. — Gegenwärtig kennt man die Zahl π bis auf etwa 140 Decimalstellen. Wie man rasch Näherungswerthe derselben findet zeigt unter andern: „Die niedere Analysis. Essen 1838." S. 133. — Vergleiche auch im vorliegenden Buche § 263.

Bemerkung. Obschon es nun allerdings nicht möglich ist, die Zahl π ganz genau auszudrücken, so kann man sich dieselbe doch als genau gefunden denken. In den folgenden §§ werden wir unter π nicht irgend einen Näherungswerth, sondern die (allerdings nur in Gedanken existirende) Zahl verstehen, welche das Verhältniß zwischen Peripherie und Durchmesser genau ausdrückt.

§ 221. Aufgabe.

Aus dem Radius r eines Kreises die Peripherie p und den Flächeninhalt J zu berechnen.

---

*) Es ist ein häufig sich findender Irrthum, daß der Decimalbruch 3,14 dem wahren Verhältnisse näher komme, als der gemeine Bruch $\frac{22}{7}$; nun ist aber, als Decimalbruch ausgedrückt, $\frac{22}{7} = 3{,}142857..$, also von dem wahren Werthe um weniger, als 0,0013 verschieden, während 3,14 von dem wahren Werthe um mehr, als 0,0015 abweicht. — Beiläufig sieht man noch, daß der Bruch $\frac{22}{7}$ ohngefähr um $\frac{1}{800}$ zu groß ist.

Aufl. 1) $p = 2r\pi$. 2) $J = r^2\pi$.

Beweis. 1) Ist der Radius r, so ist der Durchmesser 2r, und da dieser πmal in der Peripherie p enthalten ist, folglich $p = 2r\pi$.

2) Nach § 167 ist der Kreis einem Dreiecke gleich, welches den Radius r zur Höhe und die Peripherie $2r\pi$ zur Grundlinie hat; der Inhalt des Dreiecks ist aber gleich dem halben Producte aus Höhe und Grundlinie, also:

$$J = \frac{r.2r\pi}{2} = r.r\pi = r^2\pi.$$

Anm. Es sei z. B. von einem Kreise der Radius $r = 5''$ gegeben, so ist, wenn wir als Näherungswerth von π den Bruch $^{22}/_7$ annehmen,

die Peripherie $p = 2r\pi = 2.5.{}^{22}/_7 = 10.3^1/_7 = 31^3/_7''$
und der Inhalt $J = r^2\pi = 5^2.{}^{22}/_7 = 25.(3^1/_7) = 78^4/_7 \square''$.

Uebrigens sieht man leicht, daß, wenn man die Peripherie bereits gefunden hat und noch den Inhalt zu suchen hat, man nur die Peripherie mit dem halben Radius zu multipliciren braucht; so kann man z. B. in dem vorhergehenden Exempel auch setzen: $J = (31^3/_7).(2^1/_2) = 78^4/_7 \square''$.

Anm. 2. Ist die Peripherie p gegeben, so findet man vermöge der Gleichung (1) im vorherg. § den Radius

$$r = \frac{p}{2\pi},$$

und wenn der Inhalt J gegeben ist, so folgt aus der Gleichung (2)

$$r^2 = \frac{J}{\pi}, \text{ also } r = \sqrt{\frac{J}{\pi}}.$$

Ist z. B. $p = 32'$, so ist

$$r = 32 : {}^{44}/_7 = {}^{224}/_{44} = 5,09..',$$

und wenn $J = 88 \square'$ gegeben ist, so ist

$$r = \sqrt{88 : {}^{22}/_7} = \sqrt{28} = 5,29..$$

§ 222. Lehrsatz.

Bogen oder Ausschnitte desselben Kreises verhalten sich wie die zugehörigen Centriwinkel.

Der Beweis ist der nehmliche wie von § 205.

§ 223. Aufgabe.

Aus der Anzahl der Grade des Centriwinkels α die Länge des zugehörigen Bogens b und den Inhalt des Ausschnitts A zu berechnen.

Aufl. 1) $b = \frac{r\pi\alpha}{180}$. 2) $A = \frac{r^2\pi\alpha}{360}$.

Beweis. 1) Die Peripherie ist $= 2r\pi$, folglich der Bogen von einem Grade $= \frac{2r\pi}{360} = \frac{r\pi}{180}$ und der Bogen, welcher α^0 hat, $= \frac{r\pi\alpha}{180}$.

2) Eben so ist der Flächeninhalt des Kreises $= r^2\pi$, der Ausschnitt von $1^0 = \frac{r^2\pi}{360}$ und der Ausschnitt von $\alpha^0 = \frac{r^2\pi\alpha}{360}$.

Anm. 1. Ist z. B. der Radius $r = 8'$ und der Centriwinkel $\alpha = 72^0$ gegeben, so ist

$$b = \frac{r\pi\alpha}{180} = 8 \,.\, (3^1/_7) \,.\, {}^{72}/_{180} = 25^1/_7 \,.\, {}^2/_5 = 10^2/_{35}{}'$$

$$\text{und } A = \frac{r^2\pi\alpha}{360} = 64 \,.\, (3^1/_7) \,.\, {}^{72}/_{360} = 201^1/_7 \,.\, {}^1/_5 = 40^8/_{35}\,\square'.$$

Wenn man den Bogen bereits gefunden hat und noch den Ausschnitt berechnen soll, so braucht man nur den Bogen mit dem halben Radius zu multipliciren, um den Inhalt des Ausschnitts zu finden. So hat man z. B. im obigen Falle sogleich

$$A = 10^2/_{35} \,.\, 4 = 40^8/_{35}.$$

Es versteht sich wohl von selbst, wie man zu rechnen hätte, wenn der Centriwinkel in Minuten oder Secunden ausgedrückt sein sollte.

Anm. 2. Nicht uninteressant ist die Frage nach dem Bogen, dessen Länge dem Radius gleich ist. Bezeichnet man die Zahl seiner Grade mit x, so hat man in der Gleichung (1) des vorherg. § $a = x$ und $b = r$ zu setzen, wodurch dieselbe übergeht in

$$r = \frac{r\pi x}{180} \text{ oder } 180r = r\pi x,$$

$$\text{also} \qquad x = \frac{180}{\pi} = 180 \,.\, {}^7/_{22} = 57^3/_{11}{}^0.$$

Der dem Radius gleiche Bogen hat also etwas über 57^0.

§ 224. Zusatz.

Wenn man Bogen oder Ausschnitte verschiedener Kreise ähnlich nennt, wenn sie in der Größe der Centriwinkel übereinstimmen, so ergeben sich aus den Formeln des vorherg. § folgende zwei Sätze:

1) Aehnliche Bogen verhalten sich eben so wie die Radien und

2) ähnliche Ausschnitte wie die Quadrate der Radien, mit denen sie beschrieben sind.

Beweis. 1) Sind b und b' zwei ähnliche Bogen mit den Radien r und r', und ist α der beiden gemeinschaftliche Centriwinkel, so ist nach Nr. 1 im vorherg. §

$$b = \frac{r\pi\alpha}{180} \text{ und } b' = \frac{r'\pi\alpha}{180},$$

folglich: $b : b' = r : r'$.

2) Sind ferner A und A' ähnliche Ausschnitte, so ist nach Nr. 2 im vorherg. §

$$A = \frac{r^2\pi\alpha}{360} \text{ und } A' = \frac{r'^2\pi\alpha}{360},$$

folglich: $A : A' = r^2 : r'^2$.

Dreizehnter Abschnitt.

Vermischte Sätze.*)

A. Von Transversalen.

§ 225. Erklärung.

Linien, welche durch die Ecken eines Dreiecks gezogen die gegenüberstehenden Seiten oder ihre Verlängerungen schneiden, werden Transversalen genannt.

*§ 226. Lehrsatz.

Wenn man durch einen innerhalb oder außerhalb eines Dreiecks ABC (Fig. 148, a und b) gegebenen Punkt G drei Transversalen zieht, so ist das Product von drei auf den Seiten gebildeten Abschnitten, welche nicht zusammenstoßen, dem Producte der drei übrigen (ebenfalls nicht zusammenstoßenden) Abschnitte gleich, nehmlich $AF . BD . CE = BF . CD . AE$.

Beweis. Die Dreiecke ACF und BCF haben, wenn wir AF und BF als Grundlinien annehmen, einerlei Höhe und müssen sich daher wie ihre Grundlinien AF und BF verhalten. Dasselbe gilt auch von den Dreiecken AGF und BGF. Wir werden daher setzen können:

$$\triangle ACF : BCF = \triangle AGF : BGF = AF : BF.$$

Nun verhält sich aber in jeder Proportion die Differenz der Vor-

---

*) Diese Sätze sind Ergänzungen und Erweiterungen der in den vorhergehenden Abschnitten behandelten Lehren, welche dort übergangen sind, um den Anfänger nicht durch ein zu reiches Material vom weiteren Studium abzuschrecken.

glieder zur Differenz der Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede, folglich verhält sich auch:

$$\triangle\ ACF - AGF : BCF - BGF = AF : BF,$$

d. h. 1) $\triangle\ ACG : BCG = AF : BF.$

Eben so findet man weiter

2) $\triangle\ BCG : ABG = CE : AE$

und 3) $\triangle\ ABG : ACG = BD : CD.$

Wenn man nun diese Proportionen mit einander multiplicirt*) und die gleichen Factoren im Dividendus und Divisor aufhebt, so ergiebt sich $1 = AF . CE . BD : BF . AE . CD$ oder $AF . BD . CE = BF . CD . AE.$

Anm. Aus der Natur des vorstehenden Satzes läßt sich von vorn herein schließen, daß es möglich sein muß, denselben durch bloße Proportionen zwischen Linien ohne Zuziehung von Flächen zu erweisen. Man gelangt hierzu unter Andern auf folgende Art: — Wenn man sich durch C Parallelen zu AC und BE gezogen denkt, welche AB oder ihre Verlängerung in den Punkten H und K schneiden, so verhält sich

$$BD : CD = AB : AH \text{ und } CE : AE = BK : AB,$$

folglich $BD . CE : CD . AE = BK : AH.$

Nun ist aber $BK : BF = CG : GF = AH : AF,$

also $BK : AH = BF : AF$

und daher $BD . CE : CD . AE = BF : AF$

oder $AF . BD . CE = BF . CD . AE.$

*§ 227. Lehrsatz.

Wenn drei Transversalen die Seiten eines Dreiecks ABC (Fig. 149, a und b) so durchschneiden, daß die Producte dreier nicht zusammenstoßenden Abschnitte einander gleich sind, nehmlich

$$AF . BD . CE = BF . CD . AE$$

ist, so müssen die drei Transversalen sich selbst in dem nehmlichen Punkte durchschneiden.

Beweis. Denn angenommen, es schnitten sich die drei Transversalen AD, BE und CF in drei verschiedenen Punkten, so wird sich z. B. durch die Ecke C und den Punkt, in welchem sich die aus den beiden andern Ecken A und B gezogenen Transver-

*) Dieser uneigentliche und abgekürzte Ausdruck, wie man ihn häufig gebraucht findet, will sagen: Man soll sich sämmtliche Größenverhältnisse in Zahlenverhältnisse verwandelt denken, indem man statt der Größen, welche ein Verhältniß bilden, ihre auf einerlei Einheit bezogenen Maaßzahlen setzt, und hierauf die entstandenen Brüche auf der einen Seite der obigen Gleichungen mit den Brüchen auf der andern Seite multipliciren.

salen schneiden, eine neue Transversale ziehen lassen, welche AB nicht in F, sondern in einem andern Punkte X schnitte, und es müßte dann zu Folge des vorherg. § die Gleichung stattfinden:

$$AX . BD . CE = BX . CD . AE.$$

Nach der Voraussetzung soll aber sein

$$AF . BD . CE = BF . CD . AE.$$

Wenn wir nun diese beiden Gleichungen durch einander dividiren, so erhalten wir $AX : AF = BX : BF$,
welches offenbar unmöglich ist. — Es müssen daher die drei Transversalen AD, BE und CF sich in dem nehmlichen Punkte durchschneiden.

*§ 228. Lehrsatz.

1) In jedem Dreiecke durchschneiden sich die drei Mittellinien (d. h. die Linien, welche die Ecken mit den Mitten der gegenüberstehenden Seiten verbinden), in dem nehmlichen Punkte, welcher jede Mittellinie in zwei Stücke theilt, von denen das nach der Ecke zu liegende das Doppelte vom andern ist.

2) Die drei Höhen eines jeden Dreiecks (d. h. die aus den Ecken auf die gegenüberstehenden Seiten gefällten Lothe) durchschneiden sich in dem nehmlichen Punkte.

3) Die drei Linien, welche die Winkel eines Dreiecks halbiren, schneiden sich in dem nehmlichen Punkte, nehmlich im Mittelpunkte des in das Dreieck zu zeichnenden Kreises.

4) Wenn man in den Halbirungspunkten der Seiten eines Dreiecks Lothe errichtet, so schneiden sich dieselben in demselben Punkte, nehmlich im Mittelpunkte des um das Dreieck zu beschreibenden Kreises.

Beweis. 1) Wenn AF = BF, BD = CD und CE = AE (Fig. 149) ist, so ist natürlich auch

$$AF . BD . CE = BF . CD . AE.$$

Folglich schneiden sich nach dem vorherg. § alle drei Mittellinien AD, BE und CF in dem nehmlichen Punkte G.

Verbindet man ferner die Mitten zweier Seiten D und E, so ist nach § 109 die Verbindungslinie DE $\parallel$ AB und daher Winkel GDE = GAB und Winkel GED = GBA, folglich $\triangle$ DGE $\sim$ AGB; demnach verhält sich

$$DG : AG = DE : AB.$$

DE ist aber nach § 109 = $\frac{1}{2}$AB, also auch DG = $\frac{1}{2}$AG. — Eben so findet man EG = $\frac{1}{2}$BG und FG = $\frac{1}{2}$CG.

2) Wenn AD ⊥ BC, BE ⊥ AC und CF ⊥ AB (Fig. 151) ist, so ist zunächst △ BEA ∾ CFA, weil Winkel A = A und Winkel BEA = CFA = 90° ist; daher verhält sich

$$1)\ AF : AE = AC : AB.$$

Eben so findet man leicht weiter

$$2)\ BD : BF = AB : BC$$

und

$$3)\ CE : CD = BC : AC.$$

Multiplicirt man diese Proportionen mit einander, so ergiebt sich:

$$AF \cdot BD \cdot CE : AE \cdot BF \cdot CD = AC \cdot AB \cdot BC : AB \cdot BC \cdot AC,$$

folglich

$$AF \cdot BD \cdot CE = BF \cdot CD \cdot AE.$$

Demnach schneiden sich zu Folge des vorherg. § die drei Lothe AD, BE und CF in dem nehmlichen Punkte G.

(3) und (4) sind bereits in § 143 und 145 erwiesen; außerdem läßt sich aber auch Nro. 3 leicht aus dem vorherg. § mit Hilfe von § 186 herleiten.

Anm. 1. In dem Beweise von Nro. 2 ist zwar die Figur (151) nur für den Fall gezeichnet, daß das Dreieck ABC lauter spitze Winkel hat; der Beweis bleibt jedoch, wenn man die nehmliche Bezeichnung beibehält, auch für ein stumpfwinkliges Dreieck buchstäblich derselbe. — Die drei Höhen eines rechtwinkligen Dreiecks durchschneiden sich in dem Scheitel des rechten Winkels.

Anm. 2. In einem gleichseitigen Dreiecke fallen alle vier im vorherg. § behandelte Punkte in einen, nehmlich in den Mittelpunkt des regelmäßigen Dreiecks zusammen. (S. § 123.)

B. Von den Segmenten der Grundlinie eines Dreiecks.

*§ 229. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke ist das Rechteck aus der Summe und der Differenz der beiden Seiten gleich dem Rechtecke aus der Summe und der Differenz der Segmente der Grundlinie, also wenn man in dem Dreiecke ABC (Fig. 152, a und b) die Höhe CD zieht, die größere Seite BC mit a, die kleinere AC mit b bezeichnet, ferner BD = p und AD = q setzt:

$$(a + b) \cdot (a - b) = (p + q) \cdot (p - q).$$

Beweis. In den rechtwinkligen Dreiecken BCD und ACD ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze:

$$a^2 = h^2 + p^2$$

und

$$b^2 = h^2 + q^2,$$

folglich wenn wir subtrahiren.

$$a^2 - b^2 = p^2 - q^2.$$

Diese Gleichung ist aber nach einer bekannten Regel der Algebra nicht verschieden von der zu erweisenden

$$(a + b) . (a - b) = (p + q) . (p - q).$$

Anm. Man kann dieser Gleichung auch die Form einer Proportion geben $a + b : p + q = p - q : a - b$ und dieselbe dann leicht aus § 200, 3 herleiten, indem man um die Spitze des Dreiecks mit der kleinern Seite einen Kreis beschreibt und die größere Seite bis zum abermaligen Einschnitt in diesen Kreis verlängert.

Uebrigens wird man durch die erwiesene Gleichung in den Stand gesetzt, wenn von den folgenden Stücken $a + b$, $a - b$, $p + q$ und $p - q$ irgend drei gegeben sind, das vierte mit Leichtigkeit zu bestimmen.

*§ 230. Zusatz.

Wenn man sich über der Grundlinie AB (Fig. 152) mehrere Dreiecke so verzeichnet denkt, daß ihre Spitzen in beliebige Punkte des Lothes CD oder der Verlängerung desselben fallen, so haben diese Dreiecke sämmtlich die nehmlichen Segmente der Grundlinie (p und q), und es hat daher zu Folge des vorherg. § auch in allen die Differenz der Quadrate der beiden Seiten ($a^2 - b^2$) dieselbe Größe. Hieraus folgt:

Der geometrische Ort eines Punktes, für welchen der Unterschied der Quadrate seiner Abstände von zwei festen Punkten (A und B) gegeben ist, ist eine gerade Linie, welche auf der Verbindungslinie dieser beiden Punkte senkrecht steht.

*§ 231. Lehrsatz.

Wenn man in einem Dreiecke ABC (Fig. 153, a und b) die Seiten BC und AC mit a und b, die Grundlinie mit c und das der Seite anliegende Segment mit p bezeichnet, so verhält sich, wenn der Winkel B, welchen die Seite a mit der Grundlinie c bildet, ein spitzer ist (Fig. 153, a):

α) $a + p : a + b + c = c + a - b : 2c$,

β) $a - p : a + b - c = c - (a - b) : 2c$.

Wenn aber Winkel B ein stumpfer ist (Fig. 153, b):

γ) $a - p : a + b + c = c + a - b : 2c$,

δ) $a + p : a + b - c = c - (a - b) : 2c$.

Beweis. 1) Man beschreibe mit den Seiten a und b um die Punkte B und A Kreise, welche die Grundlinie und ihre Verlängerung in O und O′ und P und P′ durchschneiden. Dann ist (Fig. 152, a und b):

$$OP = BO + AP + AB = a + b + c,$$
$$O'P = OP - OO' = a + b + c - 2a = b + c - a,$$
$$OP' = OP - PP' = a + b + c - 2b = a + c - b,$$

folglich

$$O'P + OP' = b + c - a + a + c - b = 2c$$

und $O'P' = OP - (O'P + OP') = a + b + c - 2c = a + b - c.$

Wenn man sich nun den Punkt C mit O und O' und mit P und P' verbunden denkt, so sind die Winkel OCO' und PCP' rechte; daher ist nach § 199

$$CD = DO . DO' = DP . DP'.$$

Aus dieser Gleichung folgt die Proportion

$$DO : DP = DP' : DO'$$

und hieraus nach einem bekannten Satze die Proportionen

$$DO : DO + DP = DP' : DO' + DP',$$

d. h. $DO : OP = DP' : O'P'$

oder $DO : DP' = OP : O'P',$

folglich auch $DO : DO - DP' = OP : OP - O'P',$

d. h. $DO : OP' = OP : OP' + O'P$

oder $DO : OP = OP' : OP' + O'P,$

und wenn wir die oben gefundenen Werthe einsetzen:

$$DO : a + b + c = c + a - b : 2c,$$

also wenn Winkel B $< 90^0$ (Fig. 153, a);

α) $a + p : a + b + c = c + a - b : 2c$

und wenn Winkel B $> 90^0$ ist (Fig. 153, b):

γ) $a - p : a + b + c = c + a - b : 2c.$

Aus der obigen Proportion

$$DO' : DP' = DP : DO$$

folgt weiter $DO' : DO' + DP' = DP : DO + DP,$

d. h. $DO' : O'P' = DP : OP$

oder $DO' : DP = O'P' : OP,$

folglich auch $DO' : DP - DO' = O'P' : OP' - O'P,$

d. h. $DO' : O'P = O'P' : OP + O'P',$

oder $DO' : O'P' = O'P : OP' + O'P$

und wenn wir die oben angegebenen Werthe einsetzen:

$$DO' : a + b - c = c - a + b : 2c,$$

also wenn Winkel B $< 90^0$ ist (Fig. 153, a):

β) $a - p : a + b - c = c - a + b : 2c$

und wenn Winkel B $> 90^0$ ist (Fig. 153, b):

δ) $a + p : a + b - c = c - a + b : 2c.$

*§. 232. Zusatz.

Wenn wir die Proportionen (α) und (β) oder (γ) und (δ) des vorherg. § mit einander multipliciren und erwägen, daß in beiden Fällen $(a+p).(a-p) = a^2 - p^2 = h^2$ ist, so erhalten wir weiter
$h^2 : (a+b+c).(a+b-c) = (a+c-b).(b+c-a) : 4c^2$,
folglich $4c^2h^2 = (a+b+c).(a+b-c).(a+c-b).(b+c-a)$.
Ziehen wir nun die Wurzel aus und erinnern uns, daß (nach § 219, 3) 2ch der vierfache Inhalt des Dreiecks ist, welchen wir mit J bezeichnen, so erhalten wir

$$J = \frac{1}{4}.\sqrt{(a+b+c).(a+b-c).(a+c-b).(b+c-a)}$$

eine Formel, welche uns in den Stand setzt, aus den drei Seiten eines Dreiecks den Inhalt desselben zu berechnen und auch zur Inhaltsberechnung eines beliebigen Vielecks benutzt werden kann, da sich jedes Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke zerschneiden läßt.

Anm. Sind von einem Dreiecke die Seiten: $a = 7$, $b = 5$ und $c = 8$ gegeben, so ist $a+b+c = 20$; $a+b-c = 4$, $a+c-b = 10$, $b+c-a = 6$, folglich

$$J = \frac{1}{4}.\sqrt{20.4.10.6} = \frac{1}{4}\sqrt{4800} = 17{,}32..$$

C. Von der Mittellinie und der Halbirungslinie eines Winkels im Dreiecke.

*§ 233. Lehrsatz.

In jedem Parallelogramme ist die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich der Summe der Quadrate aller vier Seiten, (d. h. gleich der doppelten Summe der Quadrate zweier zusammenstoßenden Seiten.)

Beweis. Wenn das gegebene Parallelogramm ein Rechteck ist, so bildet jede Diagonale mit zwei zusammenstoßenden Seiten ein rechtwinkliges Dreieck, und die Richtigkeit des aufgestellten Satzes folgt dann unmittelbar aus dem pythagoräischen Lehrsatze.

Um dasselbe ferner auch für ein schiefwinkliges Parallelogramm ABCD (Fig. 154) darzuthun, ziehen wir die Höhe CE und durch C mit BD eine Parallele, welche die verlängerte Grundlinie AB in F durchschneidet. Setzen wir nun der Kürze wegen $AB = CD = a$, $AD = BC = b$, $AC = d$, $BD = e$, ferner $CE = h$ und $BE = u$, so ist auch $CF = e$ und $BF = a$,

folglich EF = a — u. Nun ist in den rechtwinkligen Dreiecken CEA und CEF

$$d^2 = h^2 + (a+u)^2 = h^2 + a^2 + 2au + u^2$$

und $$e^2 = h^2 + (a-u^2) = h^2 + a^2 - 2au + u^2,$$

folglich, wenn wir addiren:

$$d^2 + e^2 = 2h^2 + 2a^2 + 2u^2,$$

oder da in dem rechtwinkligen Dreiecke BEC $h^2 + u^2 = b^2$ ist:

$$d^2 + e^2 = 2a^2 + 2b^2,$$ w. z. e. w.

Anm. 1. Wenn man in dem Parallelogramm ABCD die größere Seite AB als Grundlinie annimmt, also $a > b$ voraussetzt, so ist auch im Dreiecke ABD Winkel DAB > DBA, also Winkel DBA = CFE nothwendig spitz; es muß daher die aus dem Scheitelpunkte des spitzen Winkels BCD auf die verlängerte Grundlinie AB gefällte Höhe CE innerhalb des Dreiecks CBF fallen. Man hat dann bei dem eben geführten Beweise nicht nöthig, den Fall noch besonders zu berücksichtigen, wenn die Höhe h außerhalb des Dreiecks CBF fällt, was nur geschehen kann, wenn man die kleinere Seite des Parallelogramms zur Grundlinie wählt.

Anm. 2. Auch folgender Satz ist leicht zu erweisen: In jedem Vierecke ist die Summe der Quadrate der vier Seiten gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen vermehrt um das Vierfache des Quadrats der Verbindungslinie der Mittelpunkte der Diagonalen.

Anm. 3. Die Beweise der beiden letzten §§ sind mit Benutzung der algebraischen Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$$

erhalten worden und können daher nicht mehr für rein geometrisch gelten. Es giebt nehmlich für die Ableitung geometrischer Wahrheiten zwei Wege, den rein geometrischen und den geometrisch algebraischen; ein Beweis hört aber auf rein geometrisch zu sein, wenn in demselben auch noch Verbindungen und Umformungen vorkommen, die nicht mehr an den Größen selbst, sondern nur an ihren Maaßzahlen vollzogen werden können. Alle Größen lassen überhaupt nur eine dreifache Verknüpfung zu: Addition, Subtraction und die Vergleichung, wie oft die eine (oder ein Theil derselben) in der andern enthalten ist, was zum Begriffe des Verhältnisses und der Proportion führt. In einem rein geometrischen Beweise dürfen also keine andern Sätze, als die aus der Addition, Subtraction und Proportionsrechnung angewendet werden. Dagegen ist es natürlich ganz gleichgültig, ob man sich im Beweise der algebraischen Zeichen (+), (—), (=) u. s. f. oder der weitläuftigeren Darstellung in Worten bedient. Fügt man aber zu jenen algebraischen Zeichen z. B. noch das Multiplicationszeichen und verbindet durch dasselbe die Maaßzahlen zweier Größen — (denn Größen können selbst nie mit einander multiplicirt werden), — so kann die Ableitung nicht mehr für rein geometrisch gelten. Dagegen versteht es sich wohl von selbst,

daß das Wesen des rein Geometrischen noch nicht gestört wird, wenn man zur Abkürzung das Rechteck aus den Seiten a und b durch a.b, das Quadrat über der Seite a durch a^2 u. dgl. bezeichnet, so lange man nur mit dergleichen Zeichen nicht weitere bloß algebraische Umformungen vornimmt, wie dieß allerdings in den Beweisen der beiden letzten §§ in Beziehung auf die oben angeführten Formeln geschehen ist. Es lassen sich jedoch diese Formeln selbst auch ganz leicht rein geometrisch aussprechen und an einer Figur nachweisen, was wir jedoch hier der Kürze wegen übergehen und dem Anfänger zur eignen Uebung überlassen wollen. Es können alsdann auch die Beweise der beiden letzten §§ für rein geometrisch gelten. — In den elf ersten Abschnitten dieses Lehrbuches sind alle Sätze ohne Ausnahme rein geometrisch erwiesen.

*§ 234, a. Zusatz.

In jedem Dreiecke ist die Summe der Quadrate der beiden Seiten (a und b) gleich der Summe aus dem doppelten Quadrate der halben Grundlinie (g*) und dem doppelten Quadrate der zugehörigen Mittellinie (t, d. h. der Linie, welche die Spitze mit der Mitte der Grundlinie verbindet**).

Beweis. Wenn man das Dreieck ABC (Fig. 155) zum Parallelogramm ABCD vervollständigt, so ist nach dem vorherg. §

$$2a^2 + 2b^2 = (2g)^2 + (2t)^2 = 4g^2 + 4t^2,$$

folglich $a^2 + b^2 = 2g^2 + 2t^2$, w. z. e. w.

Anm. Da man in einem Dreiecke jede beliebige Seite als Grundlinie annehmen kann, so gilt der eben angeführte Beweis nicht bloß für eine bestimmte, sondern für jede willkührliche Seite des Dreiecks.

*§ 234, b. Zusatz.

Da zu Folge des vorherg. § durch die Summe der Quadrate der beiden Seiten $(a^2 + b^2)$ und durch die Grundlinie (2g) eines Dreiecks die Mittellinie bestimmt wird, so folgt hieraus:

Der geometrische Ort eines Punktes C (Fig. 155), für welchen die Summe der Quadrate seiner Abstände von zwei festen Punkten A und B gegeben ist, ist ein (mit t beschriebener) Kreis, dessen Mittelpunkt in der Mitte der Linie AB liegt.

---

*) Wo also g nicht die ganze, sondern die halbe Grundlinie bezeichnet.

**) Dieser und der vorhergehende Satz werden in den geometrischen Lehrbüchern gewöhnlich aus einem geometrischen Satze abgeleitet, welcher eine Nachbildung der trigonometrischen Formel ist

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Ich habe diesen Satz absichtlich und, wie ich glaube, aus guten Gründen hier gänzlich übergangen. D. Verf.

*§ 34, c. Zusatz.

1) Das Quadrat einer Seite im Dreiecke, welche einem spitzen Winkel gegenüberliegt, ist kleiner als die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten.

2) Im stumpfwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der dem stumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite größer, als die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten.

3) Ein Dreieck ist daher nothwendig rechtwinklig, wenn das Quadrat einer Seite der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten gleich ist.

Beweis. Man ergänze das gegebene Dreieck ABC (Fig. 155) zum Parallelogramm ADBC.

Wenn nun 1) Winkel $ACB < 90^{\circ}$ ist, so ist Winkel $CBD > 90^{\circ}$ und daher in den Dreiecken ACB und DBC nach § 70 $AB < CD$, also $g < t$. Nun ist aber nach dem vorherg. §

$$2g^2 + 2t^2 = a^2 + b^2$$

und folglich, da $g < t$ ist:

$$4g^2 < a^2 + b^2,$$

d. h. $$AB^2 < AC^2 + BC^2.$$

2) Wenn aber Winkel ACB ein stumpfer sein sollte, dann würde $AB > CD$, also $g > t$ und folglich

$$4g^2 > a^2 + b^2,$$

d. h. $$AB^2 > AC^2 + BC^2$$ sein.

Nro. 3 aber ergiebt sich als eine unmittelbare Folge von Nr. 1 und 2.

Anm. Von Nr. 3 des vorherg. § machen Handwerker zuweilen Gebrauch, um einen rechten Winkel zu construiren. Da nehmlich $5^2 = 3^2 + 4^2$, d. h. $25 = 9 + 16$ ist, so geben die drei Seiten 3, 4 und 5 mit einander verbunden allemal ein rechtwinkliges Dreieck. Man nennt dergleichen rechtwinklige Dreiecke, deren Seiten ein rationales Verhältniß zu einander haben, pythagoräische, auch wohl ägyptische. Außer dem angeführten Beispiele 3, 4, 5 hier noch folgende: 5, 12, 13; — 8, 15, 17; — 7, 24, 25; — vergl. Arithmetik und Algebra S. 302.

*§ 235. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke ist das Rechteck der beiden Seiten (a und b) gleich der Summe aus dem Quadrate der Halbirungslinie (l) des Winkels an der Spitze und dem Rechtecke der beiden Abschnitte (m und n), in welche sie die Grundlinie theilt, — in Zeichen:

$$a \cdot b = l^2 + m \cdot n.$$

Beweis. Man beschreibe einen Kreis um das gegebene Dreieck ABC (Fig. 156), verlängere die Linie CD, welche den Winkel an der Spitze halbirt, bis sie die Peripherie in E schneidet, und ziehe BE. Dann ist Winkel A = E, und da Winkel ACD = BCE vorausgesetzt ist, folglich $\triangle$ ACD $\sim$ ECB; daher verhält sich

$$AC : CE = CD : BC \text{ oder } b : l + DE = l : a.$$

Aus dieser Proportion ergiebt sich

$$a.b = l.(l + DE) = l^2 + l.DE,$$

oder da nach § 200, 1 l.DE = m.n ist:

$$a.b = l^2 + m.n, \text{ w. z. e. w.}$$

D. Von Dreiecken und Vierecken im Kreise.

*§ 236. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke ist das Rechteck aus den beiden Seiten (a und b) gleich dem Rechtecke aus der Höhe (h) und dem Durchmesser (2r) des umschriebenen Kreises (Fig. 157).

Beweis. Man ziehe AE; dann ist Winkel CAE = 90° = CDB und Winkel E = B, folglich $\triangle$ EAC $\sim$ BDC; daher verhält sich

$$CE : AC = BC : CD \text{ oder } 2r : b = a : h;$$

also ist

$$a.b = 2r.h, \text{ w. z. e. w.}$$

Anm. Die Figur ist für den Fall entworfen, wenn beide an der Grundlinie liegende Winkel spitz sind. Wenn einer der Winkel an der Grundlinie, z. B. A, ein stumpfer oder rechter sein sollte, so sind die Winkel an der gegenüberliegenden Seite a gewiß spitz, und wenn wir die auf diese Seite gefällte Höhe = k und die Seite AB = c setzen, so ist nach dem eben Erwiesenen

1) $b.c = 2r.k.$

Nun ist aber

2) $a.k = c.h,$

weil jedes dieser Producte den doppelten Inhalt des Dreiecks ABC ausdrückt; folglich wenn wir die Gleichungen (1) und (2) mit einander multipliciren:

$$a.b.c.k = 2r.c.h.k, \text{ also } a.b = 2r.h.$$

*§ 237. Der ptolemäische Lehrsatz.

In einem Vierecke ABCD (Fig. 158), um welches sich ein Kreis beschreiben läßt, ist das Rechteck der Diagonalen gleich der Summe der Rechtecke der gegenüberstehenden Seiten; in Zeichen

$$f.g = a.c + b.d.$$

Beweis. Man mache Winkel BCE = DCA; dann ist $\triangle$ BCE $\sim$ ACD, weil auch Winkel DBC = DAC ist; daher verhält sich

$$BE : AD = BC : AC \text{ oder } BE : d = b : f,$$

und folglich ist 1) $f . BE = b . d$.
Ferner ist auch $\triangle$ DCE $\sim$ ACB, weil Winkel DCE $= \alpha + \beta =$ ACB und Winkel CDB = CAB ist; es verhält sich daher

$$DE : AB = DC : AC \text{ oder } DE : a = c : f;$$

also ist 2) $f . DE = a . c$.
Wenn wir nun die Gleichungen (1) und (2) addiren, so ergiebt sich

3) $f . (BE + DE)$ oder $f . g = a . c + b . d$, w. z. e. w.

E. Vom goldenen Schnitte und dem regelmäßigen Fünfecke.

Bemerkung. Aus den früheren Abschnitten ist leicht zu sehen, wie man in einen Kreis ein regelmäßiges Dreieck, Viereck und Sechseck zeichnet; (das Viereck wird erhalten, wenn man die Enden zweier sich senkrecht schneidenden Durchmesser verbindet; die Zeichnung des Sechsecks folgt sehr leicht aus § 147, a, und durch das Sechseck ist offenbar auch zugleich das regelmäßige Dreieck gegeben.) Durch Halbirung der Kreisbogen kann man noch leicht das Achteck, Sechzehneck, Zweiunddreißigeck u. s. f. und das Zwölfeck, Vierundzwanzigeck, Achtundvierzigeck u. s. w. zeichnen. Die Construction der hier nicht genannten Vielecke ist theils verwickelter, theils noch gar nicht gefunden. Ziemlich leicht ist noch die Zeichnung des Fünfecks. Zu dieser führt folgende Ueberlegung: Die Aufgabe, ein Fünfeck zu zeichnen, ist offenbar von der, das Zehneck zu zeichnen, nicht wesentlich verschieden. Ist nun z. B. AB (Fig. 159), die Seite des Zehnecks, C der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, so ist im gleichschenkligen Dreieck ABC der Winkel an der Spitze die Hälfte des Winkels an der Grundlinie, nehmlich $C = 36^\circ$, folglich $A = B = 72^\circ$. Halbirt man einen Winkel an der Grundlinie A durch AD, so ist W. BAD $= 36^\circ$. W. B $= 72^\circ$, folglich auch ADB $= 72^\circ$, daher $\triangle$ BDA $\sim$ ABC und AB = AD = DC, weil W. DAC $= 36^\circ$ = DCA ist. Nun verhält sich in den ähnlichen Dreiecken ABC und BDA:

$$BC : BA = BA : BD,$$

oder

$$BC : CD = CD : BD.$$

Hierdurch wird die Zeichnung des Fünfecks auf die Auflösung der folgenden Aufgabe zurückgeführt.

§ 238. Aufgabe.

Eine gegebene Linie BC (Fig. 159) nach dem goldnen Schnitte oder in stetiger Proportion zu theilen, d. h. den Punkt D zwischen B und C so zu bestimmen, daß der größere Abschnitt

CD mittlere Proportionale wird zwischen der ganzen Linie BC und dem kleinern Abschnitte BD.

Aufl. Man errichte in B das Loth BE = $\frac{1}{2}$BC, beschreibe aus E mit EB einen Kreis, ziehe CE, welche den Kreis in F und G durchschneidet, und mache CD = CF, so ist D der gesuchte Theilungspunkt.

Beweis. Nach § 200, 3 ist:

$$CG : BC = BC : CF,$$

folglich auch

$$CG - BC : BC - CF = BC : CF,$$

d. h.

$$CD : BD = BC : CD$$

oder

$$BC : CD = CD : BD.$$

§ 239. Aufgabe.

In einen Kreis ein regelmäßiges Fünfeck oder Zehneck zu zeichnen.

Aufl. Man ziehe einen beliebigen Radius CB (Fig. 159), theile denselben in stetiger Proportion, so daß sich verhält

$$1)\ BC : CD = CD : BD.$$

Dann ist CD die Seite des Zehnecks und folglich, wenn man CD = AB = AE macht, BE die Seite des Fünfecks.

Beweis. Man ziehe AC und AD; dann ist nach (1)

$$BC : AB = AB : BD,$$

folglich nach § 192 $\triangle$ ABC $\sim$ DBA, und daher W. β = C und Seite AD = AB = CD, also auch W. α = C. Demnach ist W. A = 2C = B, folglich A + B + C = 5C und C = $\frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$. Dem zu Folge ist der Bogen AB zehnmal in der Peripherie enthalten, und daher die Linie AB die Seite des Zehnecks.

§ 240. Zusatz.

Außer den Vielecken, die durch Verdoppelung der Seitenzahl des Zehnecks erhalten werden (Zwanzigeck, Vierzigeck u. dgl.), lassen sich nun auch das Fünfzehneck, Dreißigeck u. s. f. in den Kreis zeichnen. Macht man nehmlich die Sehne FG = der Seite des Zehnecks (Fig. 159), FH = der Seite des Sechsecks, d. h. ist der Bogen FG = $\frac{1}{10}$, FH = $\frac{1}{6}$, so ist GH = $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ von der ganzen Peripherie, also Sehne GH = der Seite des Fünfzehnecks.

F. Von harmonischen Punkten.

*§ 41. Erklärung.

Wenn auf einer geraden Linie zwei feste Punkte A und B (Fig. 161) gegeben sind, so existiren allemal zwei Punkte C und D, deren Abstände von A und B das nehmliche vorgeschriebene Verhältniß m:n haben, so daß sich also verhält,

$$AC : BC = AD : BD = m : n.$$

Die beiden Punkte A und B heißen die **Hauptpunkte**; C wird der **innere**, D der **äußere Theilungspunkt** genannt. Alle vier Punkte A, B, C und D heißen **harmonische**.

Anm. In der Figur ist AC = 2BC und AD = 2BD. — Der äußere Theilungspunkt D fällt in die Verlängerung über B, wenn zu Folge des vorgeschriebenen Verhältnisses AD > BD sein soll; er würde aber natürlich in die Verlängerung über A fallen, wenn AD < BD vorgeschrieben wäre.

Anm. 2. Wenn der innere Theilungspunkt C in die Mitte zwischen A und B fällt, so rückt der äußere Theilungspunkt in unendliche Entfernung hinaus. — Setzen wir der Kürze wegen AB = a, und nehmen wir ferner $AC : BC = m : n = AD : BD$ an, so ist $AC : AC + BC$ d. h. $AC : a = m : m + n$,

also $$AC = \frac{a \cdot m}{m+n}.$$

Eben so finden wir $$BC = \frac{a \cdot n}{m+n}.$$

Weiter verhält sich $AD : AD - BD$, d. h. $AD : a = m : m - n$,

also ist $$AD = \frac{a \cdot m}{m-n}.$$

Eben so findet man $$BD = \frac{a \cdot n}{m-n}.$$

Die Werthe von AD und BD werden um so größer, je weniger m von n verschieden ist, und sie werden unendlich, wenn man m = n annimmt.

*§ 242. Zusatz.

Man kann auch C und D als Hauptpunkte und A als äußeren, B als inneren Theilungspunkt annehmen. — Denn wenn die Proportion $AC : BC = AD : BD$
gegeben ist, so verhält sich auch

$$BD : BC = AD : AC.$$

Man nennt daher überhaupt je zwei zusammengehörige Punkte, wie A und B oder C und D, **zugeordnete** Punkte.

*§ 243. Aufgabe.

Zu drei in einer Linie gegebenen Punkten den vierten harmonischen Punkt zu finden.

Aufl. Wir behandeln hier nur den einen Fall, daß die beiden Hauptpunkte A und B und der innere Theilungspunkt C gegeben sind, und der äußere Theilungspunkt gesucht werden soll, da alle andern Fälle eben so leicht zu behandeln sind.

Um zu den drei gegebenen Punkten A, B, C den vierten harmonischen Punkt zu finden, lege man in A an AB einen beliebigen Winkel DAE, mache Ac = AC und bc = BC, verbinde b mit B und ziehe durch c mit bB eine Parallele, welche die verlängerte AB in D schneidet, welches der gesuchte Punkt ist. — Denn, da bB ‖ cD ist, so verhält sich

$$AD:BD = Ac:bc = AC:BC.$$

*§ 244. Lehrsatz.

Wenn auf einer Linie vier harmonische Punkte A, B, C und D (Fig. 162) gegeben sind und man beschreibt um den Abstand zweier zugeordneten Punkte C und D als Durchmesser einen Kreis, so haben die Abstände sämmtlicher Punkte dieses Kreises von den beiden andern zugeordneten Punkten A und B das nehmliche Verhältniß zu einander.

Beweis. Es sei E ein willkührlicher Punkt auf dem Kreise, so ist zu beweisen, daß sich verhält:

$$AE:BE = AC:BC.$$

Um dieses zu zeigen, verbinde man E mit dem Mittelpunkte M; dann ist $\triangle$ AME $\sim$ EMB. Denn nach der Voraussetzung verhält sich

$$1)\quad AD:BD = AC:BC;$$

folglich verhält sich auch

$$AD + AC : BD + BC = AC : BC$$

und

$$AD - AC : BD - BC = AC : BC.$$

Nun ist aber

$$AD + AC = AC + CD + AC = 2AC + 2CM = 2AM$$
$$BD + BC = CD = 2CM = 2EM$$
$$AD - AC = CD = 2CM = 2EM$$
$$BD - BC = BM + DM - BC = BM + CM - BC = 2BM.$$

Diese Werthe in die beiden letzten Proportionen eingesetzt verwandeln dieselben in

$$2)\quad AM:EM = AC:BC$$

und

$$3)\quad EM:BM = AC:BC.$$

Hieraus folgt

$$4)\quad AM:EM = EM:BM.$$

Demnach stimmen die Dreiecke AME und EMB in einem gemeinschaftlichen Winkel M und dem Verhältnisse der einschließenden

Seiten überein und sind folglich nach § 192 einander ähnlich. Es verhält sich daher auch

5) AE:BE = AM:EM,

folglich auch vermöge der Proportion (2)

6) AE:BE = AC:BC, w. z. e. w.

Dasselbe kann eben so von jedem andern Punkte auf dem um CD als Durchmesser beschriebenen Kreise erwiesen werden.

Anm. Aus der so eben erwiesenen Proportion und § 186 folgt, daß Winkel AEB durch die Linie CE halbirt wird.

*§ 245. Aufgabe.

Den geometrischen Ort eines Punktes zu finden, dessen Abstände von zwei gegebenen Punkten A und B (Fig. 162) ein vorgeschriebenes Verhältniß zu einander (m:n) haben.

Aufl. Man theile die Linie AB (Fig. 162) im Punkte C nach dem Verhältnisse m:n, suche zu den drei Punkten A, C und B den vierten harmonischen Punkt D und beschreibe um CD als Durchmesser einen Kreis, so ist dieser der gesuchte geometrische Ort.

Der Beweis ist im vorherg. § enthalten.

Uebungsaufgaben.

Aufgabe 336—337. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind die Segmente der Grundlinie und

336) die Summe der beiden Seiten;

337) der Unterschied der beiden Seiten.

Aufgabe 338—343. Den geometrischen Ort für die Spitze eines Dreiecks zu bestimmen, von welchem gegeben sind:

338) die Grundlinie und die Höhe;

339) die beiden Segmente der Grundlinie;

340) die Grundlinie und der Winkel an der Spitze;

341) die Grundlinie und die Summe der Quadrate der beiden Seiten;

342) die Grundlinie und der Unterschied der Quadrate der beiden Seiten;

343) die Grundlinie und das Verhältniß der beiden Seiten.*)

Aufgabe 344. Innerhalb oder außerhalb eines Dreiecks einen Punkt so zu bestimmen, daß seine Abstände von den drei Ecken des Dreiecks in vorgeschriebenen Verhältnissen zu einander stehen.

---

*) Verbindet man je zwei dieser sechs Oerter in eine Aufgabe, so erhält man fünfzehn bestimmte Aufgaben, welche die Zeichnung eines Dreiecks erfordern.

Aufgabe 345. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze und die beiden Abschnitte gegeben sind, in welche diese Linie die Grundlinie theilt.

Aufgabe 346 — 348. Ein Viereck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

346) die beiden Diagonalen, zwei zusammenstoßende Seiten und das Verhältniß der beiden andern Seiten;

347) eine Diagonale und zwei mit derselben ein Dreieck bildende Seiten und die Verhältnisse zwischen den nicht gegebenen Seiten und der nicht gegebenen Diagonale;

348) zwei zusammenstoßende Seiten und drei von den Winkeln, welche die andern Seiten mit den Diagonalen bilden.

Aufgabe 349. Ueber dem Radius eines Kreises zwei einander ähnliche gleichschenklige Dreiecke zu zeichnen, daß sie den Radius zur Summe der Grundlinien haben und ihre Spitzen in den Kreis fallen.

Aufgabe 350. Eine gegebene Linie so zu verlängern, daß die Verlängerung mittlere Proportionale wird zwischen der gegebenen Linie und der ganzen verlängerten Linie.

Vierzehnter Abschnitt.

Vergleichung des Inhalts und Umfangs geradliniger Figuren.

*§ 246. Lehrsatz.

1) Von allen Dreiecken mit gleicher Grundlinie und gleichem Inhalte hat das gleichschenklige den kleinsten Umfang, und umgekehrt

2) von allen Dreiecken mit gleicher Grundlinie und gleichem Umfange hat das gleichschenklige den größten Inhalt.

Beweis. 1) Ueber derselben Grundlinie AB (Fig. 163) sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC und ein beliebiges anderes Dreieck ABD verzeichnet. Da beide Dreiecke gleichen Inhalt haben sollen, so müssen auch ihre Höhen gleich sein; folglich ist $CD \parallel AB$. — Verlängern wir nun AC über C um $CE = CB$ und ziehen ED, so ist $\triangle ECD \cong BCD$, weil Winkel $ECD = CAB = CBA = BCD$, ferner $CD = CD$ und $CE = CB$ ist; folglich ist auch $DE = CB$.

Nun ist aber $\qquad AD + DE > AE$,

also auch $\qquad AD + BD > AC + BC$.

Demnach hat das Dreieck ADB einen größeren Umfang, als das gleichschenklige ACB.

2) Wenn das gleichschenklige Dreieck ABC (Fig. 164) mit irgend einem andern Dreiecke DEF eine gleiche Grundlinie AB = DE und gleichen Umfang hat, also AC + BC = DF + EF ist, so hat das gleichschenklige Dreieck ABC einen größern Flächeninhalt, als das Dreieck DEF. Denn wenn wir das Dreieck DEF in ein gleichschenkliges Dreieck DHE von gleichem Flächeninhalt verwandeln, so hat dieses letztere nach Nr. 1 einen kleinern Umfang, als das Dreieck DEF, und folglich auch einen kleinern Umfang, als das Dreieck ABC. Da die Grundlinie AB = DE vorausgesetzt ist, so muß folglich die Seite DH < AC, und wie leicht zu sehen, daher auch die Höhe HK < CG sein. Dem zu Folge ist △ DHE < ABC, also auch △ DFE < ABC, w. z. e. w.

*§ 247. Zusatz.

1) Von allen Dreiecken mit gleichem Umfange hat das gleichseitige den größten Inhalt, und

2) von allen Dreiecken mit gleichem Inhalte hat das gleichseitige den kleinsten Umfang.

Beweis. 1) Wenn in dem Dreiecke vom größten Inhalte ABC (Fig. 31) irgend eine Seite der andern ungleich, z. B. AC > BC sein sollte, so könnte man über der dritten Seite AB als Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck ABX mit dem nehmlichen Umfange zeichnen, indem man nehmlich die Seite $AX = BX = \frac{AC + BC}{2}$ machte. Dann wäre nach Nr. 2 des vorherg. § das gleichschenklige △ ABX > ABC, und folglich könnte △ ABC nicht das größte Dreieck von vorgeschriebenem Umfange sein. — Demnach müssen in dem Dreiecke vom größten Inhalte alle drei Seiten einander gleich sein.

2) Wenn ein gleichseitiges Dreieck A und ein ungleichseitiges B einerlei Inhalt haben, so hat das Dreieck A einen kleinern Umfang. Denn wenn wir ein gleichseitiges Dreieck C zeichnen, welches mit B denselben Umfang hat, so ist zu Folge Nr. 1 dem Flächeninhalte nach △ C > B, also auch △ C > A. Folglich muß auch die Seite des gleichseitigen Dreiecks C größer, als die Seite des gleichseitigen Dreiecks A, also der Umfang von C größer, als der Umfang von A sein. Demnach ist, da B und C einerlei Umfang haben, der Umfang des ungleichseitigen Dreiecks B größer, als der Umfang des gleichseitigen Dreiecks A, welches mit B gleichen Flächeninhalt hat.

Aufgabe 345. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze und die beiden Abschnitte gegeben sind, in welche diese Linie die Grundlinie theilt.

Aufgabe 346—348. Ein Viereck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

346) die beiden Diagonalen, zwei zusammenstoßende Seiten und das Verhältniß der beiden andern Seiten;

347) eine Diagonale und zwei mit derselben ein Dreieck bildende Seiten und die Verhältnisse zwischen den nicht gegebenen Seiten und der nicht gegebenen Diagonale;

348) zwei zusammenstoßende Seiten und drei von den Winkeln, welche die andern Seiten mit den Diagonalen bilden.

Aufgabe 349. Ueber dem Radius eines Kreises zwei einander ähnliche gleichschenklige Dreiecke zu zeichnen, daß sie den Radius zur Summe der Grundlinien haben und ihre Spitzen in den Kreis fallen.

Aufgabe 350. Eine gegebene Linie so zu verlängern, daß die Verlängerung mittlere Proportionale wird zwischen der gegebenen Linie und der ganzen verlängerten Linie.

Vierzehnter Abschnitt.

Vergleichung des Inhalts und Umfangs geradliniger Figuren.

*§ 246. Lehrsatz.

1) Von allen Dreiecken mit gleicher Grundlinie und gleichem Inhalte hat das gleichschenklige den kleinsten Umfang, und umgekehrt

2) von allen Dreiecken mit gleicher Grundlinie und gleichem Umfange hat das gleichschenklige den größten Inhalt.

Beweis. 1) Ueber derselben Grundlinie AB (Fig. 163) sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC und ein beliebiges anderes Dreieck ABD verzeichnet. Da beide Dreiecke gleichen Inhalt haben sollen, so müssen auch ihre Höhen gleich sein; folglich ist $CD \parallel AB$. — Verlängern wir nun AC über C um $CE = CB$ und ziehen ED, so ist $\triangle ECD \cong BCD$, weil Winkel $ECD = CAB = CBA = BCD$, ferner $CD = CD$ und $CE = CB$ ist; folglich ist auch $DE = CB$.

Nun ist aber $$AD + DE > AE,$$
also auch $$AD + BD > AC + BC.$$

Demnach hat das Dreieck ADB einen größeren Umfang, als das gleichschenklige ACB.

2) Wenn das gleichschenklige Dreieck ABC (Fig. 164) mit irgend einem andern Dreiecke DEF eine gleiche Grundlinie AB = DE und gleichen Umfang hat, also AC + BC = DF + EF ist, so hat das gleichschenklige Dreieck ABC einen größern Flächeninhalt, als das Dreieck DEF. Denn wenn wir das Dreieck DEF in ein gleichschenkliges Dreieck DHE von gleichem Flächeninhalt verwandeln, so hat dieses letztere nach Nr. 1 einen kleinern Umfang, als das Dreieck DEF, und folglich auch einen kleinern Umfang, als das Dreieck ABC. Da die Grundlinie AB = DE vorausgesetzt ist, so muß folglich die Seite DH < AC, und wie leicht zu sehen, daher auch die Höhe HK < CG sein. Dem zu Folge ist △ DHE < ABC, also auch △ DFE < ABC, w. z. e. w.

*§ 247. Zusatz.

1) Von allen Dreiecken mit gleichem Umfange hat das gleichseitige den größten Inhalt, und

2) von allen Dreiecken mit gleichem Inhalte hat das gleichseitige den kleinsten Umfang.

Beweis. 1) Wenn in dem Dreiecke vom größten Inhalte ABC (Fig. 31) irgend eine Seite der andern ungleich, z. B. AC > BC sein sollte, so könnte man über der dritten Seite AB als Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck ABX mit dem nehmlichen Umfange zeichnen, indem man nehmlich die Seite $AX = BX = \frac{AC + BC}{2}$ machte. Dann wäre nach Nr. 2 des vorherg. § das gleichschenklige △ ABX > ABC, und folglich könnte △ ABC nicht das größte Dreieck von vorgeschriebenem Umfange sein. — Demnach müssen in dem Dreiecke vom größten Inhalte alle drei Seiten einander gleich sein.

2) Wenn ein gleichseitiges Dreieck A und ein ungleichseitiges B einerlei Inhalt haben, so hat das Dreieck A einen kleinern Umfang. Denn wenn wir ein gleichseitiges Dreieck C zeichnen, welches mit B denselben Umfang hat, so ist zu Folge Nr. 1 dem Flächeninhalte nach △ C > B, also auch △ C > A. Folglich muß auch die Seite des gleichseitigen Dreiecks C größer, als die Seite des gleichseitigen Dreiecks A, also der Umfang von C größer, als der Umfang von A sein. Demnach ist, da B und C einerlei Umfang haben, der Umfang des ungleichseitigen Dreiecks B größer, als der Umfang des gleichseitigen Dreiecks A, welches mit B gleichen Flächeninhalt hat.

*§ 248. Lehrsatz.

1) Von allen Dreiecken, welche in zwei Seiten übereinstimmen, hat dasjenige den größten Inhalt, bei welchem diese beiden Seiten einen rechten Winkel einschließen.

2) Von allen Parallelogrammen, welche in zwei Seiten übereinstimmen, hat das Rechteck den größten Inhalt.

Beweis. Denn wenn wir eine der gegebenen Seiten als Grundlinie annehmen, so hat offenbar dasjenige Dreieck oder Parallelogramm, in welchem die andere gegebene Seite auf der Grundlinie senkrecht steht, die größte Höhe, also auch den größten Inhalt.

*§ 249. Lehrsatz.

1) Unter allen Rechtecken mit gleichem Inhalte hat das Quadrat den kleinsten Umfang, und

2) von allen Rechtecken mit gleichem Umfange hat das Quadrat den größten Inhalt.

Beweis. 1) Wenn das Quadrat CDEF und das Rechteck BDGH (Fig. 113) einerlei Inhalt haben, so ist die Seite des Quadrats die mittlere Proportionale zwischen den beiden Seiten des Rechtecks; also muß, wenn wir $AD = DG$ machen und über AB einen Halbkreis beschreiben, dieser durch den Punkt C gehen. Nun ist aber CD kleiner, als der Radius, also $2CD < AB$ und folglich der Umfang des Quadrats CDEF kleiner als der Umfang des Rechtecks BDGH.

Zu dem nehmlichen Ergebnisse gelangt man auch auf folgendem Wege: Wenn das Quadrat ABCD (Fig. 165) gleich dem Rechtecke AEFG ist, so muß auch $\triangle ADB = AGE$, also auch $\triangle BGD = \triangle BGE$, folglich $DE \parallel BG$ sein; es muß sich daher verhalten

$$BE : DG = AB : AG.$$

Nun ist aber $AB = AD > AG$, also auch $BE > DG$, folglich

$$AB + BE + AG > AB + AG + DG,$$

d. h. $$AE + AG > AB + AD.$$

Demnach ist der Umfang des Quadrats ABCD kleiner, als der Umfang des ihm gleichen Rechtecks AEFG.

Nr. 2 läßt sich in ähnlicher Art aus Nr. 1 leicht indirect ableiten, wie dieß in § 247 geschehen ist.

Anm. 1. Der so eben erwiesene Satz ist allerdings ein besonderer Fall des nun folgenden weit allgemeinern Satzes. Es dürfte indeß der

Mühe lohnen, jenen wichtigen Satz, welcher so häufig Anwendung findet *), noch besonders erwiesen zu haben.

Anm. 2. Aus dem so eben erwiesenen Satze folgt auch noch, daß von allen rechtwinkligen Dreiecken mit gleicher Summe der Catheten das gleichschenklige den größten Inhalt hat.

*§ 250. Lehrsatz.

Von allen Vielecken mit einer vorgeschriebenen Seitenzahl und einem gleichen Umfange hat das regelmäßige den größten Inhalt.

Beweis. Wir haben hier Zweierlei zu erweisen: erstens daß das größte Vieleck gleiche Seiten, und zweitens, daß es auch gleiche Winkel haben muß. Wir unterscheiden hierbei zwei Fälle:

1) Wenn die vorgeschriebene Seitenzahl eine gerade Zahl, z. B. gleich 8, ist. Es sei also das Achteck ABDEFGHK (Fig. 94) gegeben; wenn dieses größer sein soll, als jedes andere Achteck mit demselben Umfange, so muß dasselbe

erstens gleiche Seiten haben. Denn wenn irgend zwei zusammenstoßende Seiten, z. B. AK und KH, ungleich wären, so denke man sich AH gezogen, über AH als Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck AXH construirt, welches mit AKH einerlei Umfang hat, (so daß also $AX = HX = \frac{AK + HK}{2}$ ist). Dann ist nach § 246, 2 $\triangle AXH > AKH$, folglich auch Vieleck BDEFGHXA größer, als das Vieleck BDEFGHKA, welches mit ihm denselben Umfang hat. Es wäre also dieses nicht das größte Achteck, welches sich mit dem gegebenen Umfange umschließen ließe. Demnach muß das größte Achteck von vorgeschriebenem Umfange gleiche Seiten haben.

Zweitens muß dasselbe auch gleiche Winkel haben. Dieses wird, da wir schon seine Seiten als gleich erwiesen haben, offenbar statt finden, wenn sich zeigen läßt, daß dasselbe in einem Kreise liegt. Um dieses darzuthun, verbinden wir irgend zwei einander gegenüberliegende Ecken A und F. Dann muß zunächst Fünfeck ABDEF = FGHKA sein. Denn wenn einer dieser Theile größer, als der andere sein sollte, so würde, wenn man diesen Theil an die andere Seite der Diagonale legte, ein Achteck entstehen, welches denselben Umfang, aber größern Inhalt, als das Achteck ABDEFGHK hätte, welches gegen die Voraussetzung streitet. — Wenn wir nun irgend eine willkührliche Ecke D mit A und F verbinden, so muß Winkel ADF ein rechter sein. Denn angenommen, dieses wäre

*) Selbst den Schäfern pflegt es nicht unbekannt zu sein, daß wenn sie ihre Hürden in rechteckiger Form aufstellen, der eingeschlossene Flächenraum dann am größten ist, wenn die Seiten des Rechtecks einander gleich sind.

nicht der Fall, so denke man sich einen rechten Winkel adf gezeichnet und von dem einen Schenkel AD = ad und vom andern DF = df abgeschnitten, ferner a mit f verbunden und über ad ein dem Dreiecke ABD congruentes Dreieck abd und eben so über df ein △ def ≌ DEF gezeichnet. Dann entstände ein Fünfeck abdef, welches größer, als ABDEF wäre, weil das rechtwinklige Dreieck adf nach § 248, 1 größer, als das Dreieck ADF ist. Wenn wir nun an die andere Seite von af ein dem Fünfeck abdef congruentes Fünfeck zeichnen, so erhalten wir ein Achteck, welches ganz dieselben Seiten wie das gegebene Achteck ABDEFGHK, aber einen größern Inhalt hat. Es wäre also dieses letztere nicht das größte Achteck, welches sich mit einem gegebenen Umfange einschließen läßt. Wenn also ABDEFGHK das größte Achteck sein soll, so muß der Winkel ADF ein rechter sein, also der um AF als Durchmesser beschriebene Halbkreis durch D gehen. Das Nehmliche kann in ähnlicher Art von den übrigen Ecken erwiesen werden. Also muß das größte Achteck ABDEFGHK in einem Kreise liegen, und da wir schon gesehen haben, daß es gleiche Seiten hat, so müssen offenbar auch seine Winkel (nach § 129) einander gleich und das Vieleck selbst regelmäßig sein. — Dasselbe gilt eben so von jedem andern Vieleck mit einer geraden Seitenzahl.

2) Wenn aber die Seitenzahl eine ungerade, z. B. = 5, sein sollte, so sei Fünfeck ABCDE (Fig. 166) das größte, welches sich mit einem gegebenen Umfange umschließen läßt; dann läßt sich ganz in der nehmlichen Art zeigen, wie dieses in Nr. 1 für ein Achteck geschehen ist, daß dasselbe gleiche Seiten haben muß. Um nun weiter zu erweisen, daß es auch gleiche Winkel haben muß, nehmen wir das Gegentheil an, und denken uns ein regelmäßiges Fünfeck abcde gezeichnet, welches mit ABCDE dieselben Seiten hat, beschreiben um abcde einen Kreis und zeichnen über jeder Seite desselben ein gleichschenkliges Dreieck, welches zur Grundlinie eine Seite des regelmäßigen Fünfecks abcde und seine Spitze auf dem Kreise hat, so entsteht ein regelmäßiges Zehneck, welches wir mit Z bezeichnen wollen. Zeichnen wir nun über den Seiten des Fünfecks ABCDE eben solche gleichschenklige Dreiecke, wie über den Seiten des regelmäßigen Fünfecks abcde, so erhalten wir ein zweites Zehneck, welches mit Z in allen Seiten übereinstimmt und mit Y benannt sein soll. Da das Zehneck Z regelmäßig ist und mit Y denselben Umfang hat, so ist nach Nr. 1 $Z > Y$, folglich auch, wenn wir die gleichgemachten Dreiecke weglassen, Fünfeck

abcde > ABCDE. Demnach wäre dieses nicht das größte Fünfeck von vorgeschriebenem Umfange. Es muß daher auch ein Vieleck von ungerader Seitenzahl, wenn es bei gegebenem Umfange das größte sein soll, regelmäßig sein.

*§ 251. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden Satze folgt leicht umgekehrt: — Unter allen Vielecken mit gleicher Seitenzahl und gleichem Inhalte hat das größte den kleinsten Umfang.

*§ 252. Lehrsatz.

1) Von zwei regelmäßigen Vielecken mit gleichem Umfange hat das mit der größern Seitenzahl den größern Inhalt, und

2) von zwei regelmäßigen Vielecken mit gleichem Inhalte hat das mit der größern Seitenzahl einen kleinern Umfang.

Beweis. Wenn ABCDE (Fig. 166) ein regelmäßiges Fünfeck ist, und ich nehme auf einer Seite DE einen beliebigen Punkt X an, ziehe AX und denke mir über AX als Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck AZX construirt, welches mit dem Dreiecke AEX denselben Umfang hat, so ist nach § 246, 2 $\triangle$ AZX > AEX, folglich auch das Sechseck BCDXZA größer, als das gegebene Fünfeck ABCDE, mit welchem es denselben Umfang hat. Nun ist aber das unregelmäßige Sechseck BCDXZA nach § 250 kleiner, als ein regelmäßiges Sechseck von gleichem Umfange, um so mehr muß dasselbe von dem Fünfecke ABCDE gelten.

Eben so läßt sich zeigen, daß überhaupt jedes regelmäßige $(n+1)$eck größer ist, als ein regelmäßiges n eck von gleichem Umfange. *)

Nr. 2 folgt sehr leicht indirect aus (1).

*§ 253. Zusatz.

Da wir den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten ansehen, so folgt aus dem letzten Satze:

1) Unter allen Figuren, welche einen gleichen Umfang haben, hat der Kreis den größten Inhalt, und

2) von allen Figuren mit gleichem Inhalte hat der Kreis den kleinsten Umfang.

---

*) Dieser sehr einfache Beweis ist der Abhandlung von Steiner in Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik B. 24, H. 2, S. 112 entnommen.

Fünfzehnter Abschnitt.

Rechnungen.

*§ 254. Aufgabe.

Aus der Seite a eines gleichseitigen Dreiecks den Inhalt J zu berechnen.

Aufl. Zieht man die Höhe h (Fig. 167), so ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$h^2 + \tfrac{1}{4}a^2 = a^2, \text{ also } h^2 = \tfrac{3}{4}a^2$$

und folglich $h = \sqrt{\tfrac{3}{4}a^2} = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3}$.

Hieraus ergiebt sich $J = \tfrac{1}{2}a.h = \tfrac{1}{4}a^2\sqrt{3}$.

Anm. Wenn man über der nehmlichen Linie a ein gleichseitiges Dreieck und ein Quadrat construirt, so verhält sich hiernach der Inhalt des Dreiecks zum Inhalt des Quadrats wie

$$\tfrac{1}{4}a^2\sqrt{3} : a^2 = \sqrt{3} : 4 = 1{,}732.. : 4 = 0{,}433.. : 1.$$

Wenn aber ein Quadrat und ein gleichseitiges Dreieck einerlei Umfang haben und man denkt sich diesen Umfang in zwölf gleiche Theile getheilt, so kommen auf eine Seite des Quadrats drei Theile und der Inhalt desselben ist folglich $= 9$; auf eine Seite des Dreiecks kommen vier Theile, und wenn wir in der obigen Formel $a = 4$ setzen, so ergiebt sich der Inhalt des Dreiecks $= \tfrac{1}{4}.16.\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$. Demnach verhält sich bei gleichem Umfange der Inhalt des gleichseitigen Dreiecks zum Inhalt des Quadrats wie

$$4.\sqrt{3} : 9 = 6{,}928.. : 9 = 0{,}769.. : 1.$$

*§ 255. Aufgabe.

Aus der Seite a und der Grundlinie c eines gleichschenkligen Dreiecks den Inhalt J zu berechnen. (Fig. 168.)

Aufl. Zieht man die Höhe h, so ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze $h^2 = a^2 - \tfrac{1}{4}c^2$, folglich $h = \sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4}c^2}$ und daher

$$J = \tfrac{1}{2}c.h = \tfrac{1}{2}c.\sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4}c^2} = \tfrac{1}{2}c.\sqrt{(a + \tfrac{1}{2}c).(a - \tfrac{1}{2}c)}.$$

*§ 256. Aufgaben.

Aus den drei Seiten a, b und c eines Dreiecks ABC (Fig. 152) den Inhalt J zu berechnen.

Die Auflösung dieser Aufgabe ist bereits in § 232 mitgetheilt. Wir wollen hier indeß die dort aus geometrischen Sätzen hergeleitete Formel auch noch auf dem Wege der bloßen Rechnung zu gewinnen suchen, indem wir von geometrischen Sätzen allein den pythagoräischen zu Hilfe nehmen.

Wir suchen zuerst die Höhe h zu bestimmen, und um diese zu erhalten, berechnen wir vorher die Segmente p und q. — In den rechtwinkligen Dreiecken ACD und BCD ist

$$h^2 = b^2 - q^2 = a^2 - p^2,$$

folglich $$p^2 - q^2 = a^2 - b^2,$$

oder $$(p+q).(p-q) = a^2 - b^2,$$

also $$p - q = \frac{a^2 - b^2}{p+q},$$

oder da $$1)\quad p + q = c \text{ ist:}$$

$$2)\quad p - q = \frac{a^2 - b^2}{c};$$

folglich wenn wir addiren $$2p = \frac{a^2 - b^2}{c} + c = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{c}$$

und $$3)\quad p = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}.$$

Eben so finden wir, indem wir Gleichung (2) von (1) subtrahiren,

$$4)\quad q = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2c}.$$

Nun ist in dem rechtwinkligen Dreiecke BCD

$$5)\quad h = \sqrt{a^2 - p^2} = \sqrt{(a+p).(a-p)}.$$

Vermöge der Gleichung (3) ist aber

$$a + p = a + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} = \frac{2ac + a^2 - b^2 + c^2}{2c} = \frac{(a+c)^2 - b^2}{2c}.$$

Denken wir uns in der bekannten algebraischen Formel $u^2 - v^2 = (u+v).(u-v)$, $u = a + c$ und $v = b$ gesetzt, so erhalten wir aus der letzten Gleichung

$$6)\quad a + p = \frac{(a + c + b).(a + c - b)}{2c}.$$

Ferner ist vermöge der Gleichung (3)

$$a - p = a - \frac{(a^2 - b^2 + c^2)}{2c} = \frac{2ac - a^2 + b^2 - c^2}{2c} =$$

$$\frac{b^2 - (a^2 - 2ac + c^2)}{2c} = \frac{b^2 - (a - c)^2}{2c}$$

oder wenn wir in der Formel $u^2 - v^2 = (u+v).(u-v)$, $u = b$ und $v = a - c$ setzen

$$7)\quad a - p = \frac{(b + a - c).(b - a + c)}{2c}.$$

Setzen wir nun die in (6) und (7) gefundenen Resultate in die Gleichung (5) ein, so erhalten wir

$$\frac{1}{2}a = \sqrt{b^2 - DF^2}.$$

Nun ist aber, wenn wir EG ziehen, nach § 199, IV

$$DF : b = b : DG = b : 2r, \text{ also } DF = \frac{b^2}{2r}.$$

Setzen wir diesen Werth in die obige Gleichung ein, so ergiebt sich

$$\frac{1}{2}a = \sqrt{b^2 - \frac{b^4}{4r^2}} = \frac{\sqrt{4r^2b^2 - b^4}}{2r} = \frac{b.\sqrt{4r^2 - b^2}}{2r}$$

also

$$2)\quad a = \frac{b.\sqrt{4r^2 - b^2}}{r}.$$

*§ 260. Aufgabe.

1) Aus dem Radius r eines Kreises und der Seite a eines regelmäßigen Vielecks in demselben die Seite c eines um den Kreis beschriebenen Vielecks von derselben Seitenzahl zu berechnen, und umgekehrt

2) aus dem Radius r und der Seite c des umschriebenen Vielecks die Seite a des eingeschriebenen Vielecks von gleicher Seitenzahl zu bestimmen. (Fig. 170.)

Aufl. 1) In den ähnlichen Dreiecken CFE und CDH verhält sich $\frac{1}{2}c : \frac{1}{2}a$, also auch:

$$c : a = CD : CF = r : \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a^2};$$

folglich ist

$$1)\quad c = \frac{ar}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a^2}}.$$

2) Ferner verhält sich in denselben Dreiecken $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}c$, also auch $a : c = CE : CH = r : CH$,

oder da im rechtwinkligen Dreiecke CDH $CH = \sqrt{r^2 + \frac{1}{4}c^2}$ ist:

$$a : c = r : \sqrt{r^2 + \frac{1}{4}c^2};$$

folglich ist

$$2)\quad a = \frac{cr}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{4}c^2}}.$$

*§ 261. Aufgabe.

Aus dem Radius r eines Kreises die Seite des in den Kreis beschriebenen regelmäßigen Dreiecks, Vierecks, Fünfecks, Sechsecks und Zehnecks zu berechnen.

Aufl. 1) Die Seite des Sechsecks ist bekanntlich gleich dem Radius = r.

2) Das regelmäßige Dreieck sei ABC (Fig. 171); ziehen wir den Durchmesser CD, so halbirt dieser, (wie man leicht einsieht,) den

Winkel ACB, folglich auch den Bogen AB; demnach ist BD Seite des regelmäßigen Sechsecks $= r$, und daher im rechtwinkligen $\triangle$ CBD $\quad x^2 + r^2 = 4r^2$, also $x^2 = 3r^2$
und $\quad x = r\sqrt{3}$.

3) Zur Bestimmung der Seite des Vierecks dient (Fig. 172) die Gleichung: $x^2 + x^2 = 4r^2$, also $x^2 = 2r^2$
und $\quad x = r\sqrt{2}$.

4) Nach § 239 wird die Seite x des Zehnecks gefunden, wenn man den Radius in stetiger Proportion theilt, so daß sich verhält (Fig. 159) $\quad r : x = x : r - x$.

Hieraus folgt: $\quad x^2 = r^2 - rx$
oder $\quad x^2 + rx = r^2$,
also
$$x = -\tfrac{1}{2}r + \sqrt{r^2 + \tfrac{1}{4}r^2}$$
$$= \frac{-r + \sqrt{5r^2}}{2} = \frac{r(-1 + \sqrt{5})}{2}.$$

5) Mit Hülfe der Gleichung (2) in § 259 läßt sich nun auch leicht die Seite y des Fünfecks berechnen. Setzt man nehmlich in der angeführten Gleichung $a = y$, $b = x$, so erhält man:
$$y^2 = \frac{x^2(4r^2 - x^2)}{r^2}.$$
Nun ist aber so eben gefunden
$$x^2 = \frac{r^2(-1+\sqrt{5})^2}{4} = \frac{r^2(1-2\sqrt{5}+5)}{4} = \frac{r^2(3-\sqrt{5})}{2},$$
folglich
$$4r^2 - x^2 = \frac{8r^2}{2} - \frac{r^2(3-\sqrt{5})}{2} = \frac{r^2(5+\sqrt{5})}{2}$$
und
$$\frac{x^2(4r^2-x^2)}{r^2} = \frac{r^2(3-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{4} = \frac{r^2(10-2\sqrt{5})}{4},$$
also
$$y = \frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

*§ 262. Zusatz.

Nach dem vorherg. § ist das Quadrat der Seite des Fünfecks
$$= \frac{r^2(10-2\sqrt{5})}{4} = \frac{r^2(5-\sqrt{5})}{2}$$
und das Quadrat der Seite des Zehnecks
$$= \frac{r^2(3-\sqrt{5})}{2},$$
folglich ihre Differenz $= r^2$.
Es bilden daher der Radius, die Seite des Fünfecks und die Seite

$$8)\quad h = \frac{\sqrt{(a+b+c).(a+c-b).(a+b-c).(b+c-a)}}{2c}.$$

Bekanntlich ist $\quad 9)\ J = \frac{1}{2} c . h,$

also wenn wir den so eben gefundenen Werth von h einsetzen:

$$10)\ J = \frac{1}{4} . \sqrt{(a+b+c).(a+b-c).(a+c-b).(b+c-a)}.$$

Anm. Dieser Ausdruck wird imaginär, wenn man eine Seite größer, als die Summe der beiden andern annimmt; er verschwindet, wenn eine Seite der Summe der beiden andern gleich ist; in allen andern Fällen ist derselbe reell. — Ist z. B. $a = 8$, $b = 5$, $c = 6$, so ist $a+b+c = 19$, $a+b-c = 7$, $a+c-b = 9$ und $b+c-a = 3$, folglich

$$J = \frac{1}{4} . \sqrt{19.7.9.3} = \frac{1}{4} . \sqrt{3591} = \frac{1}{4} . 59{,}92.. = 14{,}98..$$

Die obige Formel at auch noch den praktischen Vorzug, daß sie ganz zum Rechnen mit Logarithmen geeignet ist.

*§ 257. Aufgabe.

Aus den vier Seiten eines Trapezes a, b, c und d den Inhalt J zu berechnen. (Fig. 169.)

Aufl. Zieht man durch C mit AD die Parallele CE, so sind im Dreiecke BCE alle drei Seiten bekannt, nehmlich $BC = b$, $CE = d$ und $BE = a - c$. Es läßt sich daher der Inhalt dieses Dreiecks, welchen wir J′ nennen wollen, nach der Formel des vorherg. § berechnen. Nun ist aber, wenn h die gemeinschaftliche Höhe des Dreiecks BCE und des Trapezes ABCD bezeichnet, nach § 219 der Inhalt des Trapezes ABCD

$$J = \frac{1}{2}(a+c).h$$

und der Inhalt des Dreiecks BCE

$$J' = \frac{1}{2}(a-c).h,$$

folglich $\quad J : J' = a+c : a-c$

und daher: $\quad J = \frac{a+c}{a-c} . J'.$

Anm. Ist z. B. $a = 12$, $b = 7$, $c = 8$ und $d = 6$ gegeben, so hat das Dreieck BCE die Seiten 7, 6 und 4. Nun ist $7+6+4 = 17$, $7+6-4 = 9$, $7+4-6 = 5$ und $6+4-7 = 3$, also der Inhalt des Dreiecks BCE

$$J = \frac{1}{4} . \sqrt{17.9.5.3} = \frac{1}{4} . \sqrt{2295}$$

und folglich, da $a+c : a-c = 20 : 4 = 5$ ist, der Inhalt des Trapezes

$$J = \frac{5}{4} . \sqrt{2295} = 59{,}88..$$

In allgemeinen Zeichen ausgedrückt ist der Inhalt des Trapezes

$$J = \frac{1}{4} . \sqrt{(a-c+b+d).(a-c+b-d).(a-c-b+d).(-a+c+b+d)}.$$

*§ 258. Aufgabe.

Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks 1) den Radius r des umschriebenen Kreises und 2) den Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises zu berechnen.

Aufl. 1) Nach § 236 (Fig. 157) und § 219 ist

$$2rh = ab \text{ und } \tfrac{1}{2}hc = J;$$

folglich, wenn wir, um h wegzuschaffen, diese beiden Gleichungen durch einander dividiren:

$$\frac{4r}{c} = \frac{ab}{J} \text{ oder } r = \frac{abc}{4J},$$

wo man J auf die in § 256 angegebene Art durch die drei Seiten auszudrücken hat.

2) Wenn man den Mittelpunkt M des in das Dreieck ABC (Fig. 92) beschriebenen Kreises mit den Ecken A, B und C verbindet, so ist $\triangle ABC = \triangle ABM + BCM + ACM$.
Nun sind aber die Inhalte dieser Dreiecke, welche sämmtlich ϱ zur Höhe haben, beziehlich

$$\tfrac{1}{2}\varrho . c, \ \tfrac{1}{2}\varrho . a \text{ und } \tfrac{1}{2}\varrho . b,$$

also der Inhalt des ganzen Dreiecks ABC

$$J = \tfrac{1}{2}\varrho . (a+b+c), \text{ folglich } \varrho = \frac{2J}{a+b+c}.$$

*§ 259. Aufgabe.

1) Aus dem Radius r eines Kreises und der Seite a eines in den Kreis beschriebenen regelmäßigen Vielecks (von n Seiten) die Seite b eines in denselben Kreis beschriebenen regelmäßigen Vielecks von doppelt so viel (2n) Seiten zu berechnen, und umgekehrt

2) aus dem Radius r und der Seite b des 2necks die Seite a des necks zu finden. (Fig. 170.)

Aufl. 1) In dem rechtwinkligen Dreiecke DFE ist

$$b = \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + DF^2}.$$

Nun ist aber DF = r — CF und in dem rechtwinkligen Dreiecke CFE $CF = \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}a^2}$, also $DF = r - \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}a^2}$ und folglich, wenn wir quadriren:

$$DF^2 = r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}a^2} + r^2 - \tfrac{1}{4}a^2 = 2r^2 - \tfrac{1}{4}a^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}a^2}.$$

Setzen wir diesen Werth in die obige Gleichung ein, so ergiebt sich

$$1) \quad b = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}a^2}}.$$

2) Wenn b gegeben und a zu berechnen ist, so erhalten wir aus dem rechtwinkligen Dreiecke DFE

$$\tfrac{1}{2}a = \sqrt{b^2 - DF^2}.$$

Nun ist aber, wenn wir EG ziehen, nach § 199, IV

$$DF : b = b : DG = b : 2r, \text{ also } DF = \frac{b^2}{2r}.$$

Setzen wir diesen Werth in die obige Gleichung ein, so ergiebt sich

$$\tfrac{1}{2}a = \sqrt{b^2 - \frac{b^4}{4r^2}} = \frac{\sqrt{4r^2b^2 - b^4}}{2r} = \frac{b.\sqrt{4r^2 - b^2}}{2r}$$

also $$2) \quad a = \frac{b.\sqrt{4r^2 - b^2}}{r}.$$

*§ 260. Aufgabe.

1) Aus dem Radius r eines Kreises und der Seite a eines regelmäßigen Vielecks in demselben die Seite c eines um den Kreis beschriebenen Vielecks von derselben Seitenzahl zu berechnen, und umgekehrt

2) aus dem Radius r und der Seite c des umschriebenen Vielecks die Seite a des eingeschriebenen Vielecks von gleicher Seitenzahl zu bestimmen. (Fig. 170.)

Aufl. 1) In den ähnlichen Dreiecken CFE und CDH verhält sich $\tfrac{1}{2}c : \tfrac{1}{2}a$, also auch:

$$c : a = CD : CF = r : \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}a^2};$$

folglich ist $$1) \quad c = \frac{ar}{\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}a^2}}.$$

2) Ferner verhält sich in denselben Dreiecken $\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}c$, also auch $a : c = CE : CH = r : CH$,

oder da im rechtwinkligen Dreiecke CDH $CH = \sqrt{r^2 + \tfrac{1}{4}c^2}$ ist:

$$a : c = r : \sqrt{r^2 + \tfrac{1}{4}c^2};$$

folglich ist $$2) \quad a = \frac{cr}{\sqrt{r^2 + \tfrac{1}{4}c^2}}.$$

*§ 261. Aufgabe.

Aus dem Radius r eines Kreises die Seite des in den Kreis beschriebenen regelmäßigen Dreiecks, Vierecks, Fünfecks, Sechsecks und Zehnecks zu berechnen.

Aufl. 1) Die Seite des Sechsecks ist bekanntlich gleich dem Radius = r.

2) Das regelmäßige Dreieck sei ABC (Fig. 171); ziehen wir den Durchmesser CD, so halbirt dieser, (wie man leicht einsieht,) den

Winkel ACB, folglich auch den Bogen AB; demnach ist BD Seite des regelmäßigen Sechsecks $= r$, und daher im rechtwinkligen $\triangle$ CBD $\quad x^2 + r^2 = 4r^2$, also $x^2 = 3r^2$
und $\quad x = r\sqrt{3}$.

3) Zur Bestimmung der Seite des Vierecks dient (Fig. 172) die Gleichung: $x^2 + x^2 = 4r^2$, also $x^2 = 2r^2$
und $\quad x = r\sqrt{2}$.

4) Nach § 239 wird die Seite x des Zehnecks gefunden, wenn man den Radius in stetiger Proportion theilt, so daß sich verhält (Fig. 159) $\quad r : x = x : r - x$.

Hieraus folgt: $\quad x^2 = r^2 - rx$
oder $\quad x^2 + rx = r^2$,
also
$$x = -\tfrac{1}{2}r + \sqrt{r^2 + \tfrac{1}{4}r^2}$$
$$= \frac{-r + \sqrt{5r^2}}{2} = \frac{r(-1 + \sqrt{5})}{2}.$$

5) Mit Hülfe der Gleichung (2) in § 259 läßt sich nun auch leicht die Seite y des Fünfecks berechnen. Setzt man nehmlich in der angeführten Gleichung $a = y$, $b = x$, so erhält man:
$$y^2 = \frac{x^2(4r^2 - x^2)}{r^2}.$$
Nun ist aber so eben gefunden
$$x^2 = \frac{r^2(-1+\sqrt{5})^2}{4} = \frac{r^2(1-2\sqrt{5}+5)}{4} = \frac{r^2(3-\sqrt{5})}{2},$$
folglich $4r^2 - x^2 = \frac{8r^2}{2} - \frac{r^2(3-\sqrt{5})}{2} = \frac{r^2(5+\sqrt{5})}{2}$
und $$\frac{x^2(4r^2-x^2)}{r^2} = \frac{r^2(3-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{4} = \frac{r^2(10-2\sqrt{5})}{4},$$
also $$y = \frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

*§ 262. Zusatz.

Nach dem vorherg. § ist das Quadrat der Seite des Fünfecks
$$= \frac{r^2(10-2\sqrt{5})}{4} = \frac{r^2(5-\sqrt{5})}{2}$$
und das Quadrat der Seite des Zehnecks
$$= \frac{r^2(3-\sqrt{5})}{2},$$
folglich ihre Differenz $= r^2$.
Es bilden daher der Radius, die Seite des Fünfecks und die Seite

des Zehnecks ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Seite des Fünfecks die Hypotenuse ist.

*§ 263. Zusatz.

Durch die Gleichung (1) in § 259 wird man in den Stand gesetzt, die Seiten der regelmäßigen Vielecke im Kreise zu berechnen, welche 2, 4, 8... mal so viel Seiten haben, als eins der in § 261 angegebenen, und mit Hilfe der Gleichung (1) in § 260 kann man auch die Seiten der um den Kreis beschriebenen Vielecke von den angezeigten Seitenzahlen bestimmen.

Bemerkung. In früherer Zeit hat man sich dieser Gleichungen bedient, um Näherungswerthe für die Zahl π, welche das Verhältniß zwischen Peripherie und Durchmesser ausdrückt, zu erhalten. Am bequemsten geht man hierbei vom Sechseck aus, da dessen Seite dem Radius gleich ist, sucht dann die Seite des Zwölfecks, Vierundzwanzigecks, Achtundvierzigecks u. s. w. im Kreise und bestimmt endlich die Seiten der zugehörigen Vielecke um den Kreis, so geben die Zahlen für die Umfänge dieser Vielecke Grenzen an, zwischen welchen die Peripherie enthalten ist. Man hat auf diese Art, indem der Radius als Einheit angenommen ist, gefunden:

am Kreise	die Seite des eingeschriebenen	die Seite des umschriebenen	den halben Umfang des ersteren	den halben Umfang des letztern
6ecks	1,000000 . .	1,154700 . .	3,0000 . .	3,4641 . .
12ecks	0,517638 . .	0,535898 . .	3,1058 . .	3,2153 . .
24ecks	0,261052 . .	0,263305 . .	3,1326 . .	3,1596 . .
48ecks	0,130806 . .	0,131087 . .	3,1393 . .	3,1460 . .
96ecks	0,065438 . .	0,065473 . .	3,1410 . .	3,1427 . .
192ecks	0,032723 . .	0,032727 . .	3,1414 . .	3,1418 . .

Sechszehnter Abschnitt.

Von der geometrischen Construction algebraischer Ausdrücke.

*§ 264. Erklärung.

Bezeichnet man die in einer Betrachtung vorkommenden Maaßzahlen von Linien durch die Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets a, b, c . . . so nehmlich, daß man einerseits für die Maaßzahl jeder in der Betrachtung vorkommenden Linie allemal einen dieser Buchstaben, (also kein anderes Zeichen, insbesondere keine bestimmte Zahl 1, 2, 3 u. dgl.) setzt und andererseits durch diese Buchstaben nichts anderes als Maaßzahlen von Linien vorstellt, (also die Maaßzahlen anderer Größen, wenn deren zugleich mit in Betracht gezogen werden sollen, durch andere Zeichen ausdrückt,): so sagt man, jeder einzelne dieser Buchstaben habe eine Dimension, und von einem Producte, welches zwei, drei... dieser Buchstaben zu Factoren hat, es habe zwei, drei... Dimensionen.

So hat z. B. unter den angegebenen Voraussetzungen jedes der folgenden Producte zwei Dimensionen:

$$ab,\ 3fg,\ r^2\pi = rr\pi.$$

Die beiden letzten enthalten zwar drei Factoren, aber die Zeichen 3 und π haben nach dem Obigen auf die Anzahl der Dimensionen des Productes keinen Einfluß.

*§ 265. Erklärung.

1) und 2) Wenn man Ausdrücke, die gleich viele Dimensionen enthalten, addirt oder von einander subtrahirt, so hat die Summe oder Differenz eben so viel Dimensionen.

So haben z. B. die folgenden Ausdrücke

$$5abc + 3ax^2$$
$$2axy - bcz$$
$$a^2x - bcy + z^3$$

sämmtlich drei Dimensionen.

3) Wenn man zwei Ausdrücke mit einander multiplicirt, so hat das Product so viel Dimensionen, als beide zusammen.

So hat z. B. in dem Producte

$$(3ab).(5bcx) = 15ab^2cx$$

der erste Factor 2, der andere 3 und das Product 5 Dimensionen.

4) Die Zahl der Dimensionen eines Bruches wird erhalten, wenn man von der Zahl der Dimensionen des Zählers die Zahl der Dimensionen des Nenners subtrahirt. — Diese Differenz kann sowohl positiv, als Null oder negativ sein.

So ist z. B. in dem Ausdruck

$\frac{a^2+bx}{c}$ die Zahl der Dimensionen $+1$,

$\frac{a^2b}{cdf}$ " " " " 0,

$\frac{x}{fgh}$ — " " " " -2.

5) Erhebt man einen Ausdruck in die zweite, dritte ... Potenz, so hat die Potenz zwei-, drei-... mal so viel Dimensionen.

So hat in dem folgenden Beispiel

$$(3abc)^2 = 9a^2b^2c^2$$

der Dignand 3 und die zweite Potenz 6 Dimensionen und in dem Beispiele

$$\left(\frac{2a^2}{b}\right)^3 = \frac{8a^6}{b^3}$$

der Dignand eine und die dritte Potenz drei Dimensionen.

6) Die Zahl der Dimensionen einer Wurzel wird gefunden, wenn man die Zahl der Dimensionen des Radicanden durch den Wurzelexponenten dividirt. — Dieser Quotient kann sowohl eine ganze, als auch eine gebrochene Zahl sein.

So hat z. B. die folgende Wurzel

$\sqrt{abcd}$ 2 Dimensionen

und $\sqrt{a^2x+bxy}$ $^3/_2$ "

*§ 266. Erklärung.

Im Folgenden sollen nur solche Ausdrücke, welche gleich viel Dimensionen haben, durch Addition und Subtraction verbunden werden. —

Eine algebraische Summe heißt homogen, wenn alle Glieder derselben gleich viel Dimensionen haben; eben so nennt man auch eine Gleichung homogen, wenn sich in allen Gliedern gleich viel Dimensionen finden.

*§ 267. Zusatz.

1) Der Ausdruck für die Maaßzahl einer Linie hat eine Dimension.

2) Der Ausdruck für die Maaßzahl einer Fläche hat zwei Dimensionen.

Beweis. 1) Die Richtigkeit dieser Behauptung ist eine unmittelbare Folge der Erklärung in § 264.

2) Sind g und h die Maaßzahlen der Grundlinie und Höhe eines Rechtecks, so ist die Zahl für den Inhalt desselben

$$= g \,.\, h.$$

Dieser Ausdruck hat zwei Dimensionen, und dasselbe gilt für die Inhalte aller andern Figuren, da dieselben sämmtlich durch Zurückführung auf ein Rechteck (§ 219 und 221) erhalten sind.

Bemerkung. In der Stereometrie wird bewiesen, daß der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedum, dessen Länge, Breite und Höhe die Maaßzahlen a, b, c haben, gleich dem Producte a.b.c ist, welches drei Dimensionen hat; und dasselbe gilt auch für den Inhalt eines jeden andern Körpers, da man sich immer ein Parallelepipedum denken kann, welches mit dem gegebenen Körper gleichen Inhalt hat.

*§ 268. Erklärung.

Bezeichnen, wie auch früher, a, b, c, d . . . die Maaßzahlen von Linien, und stellt x irgend einen aus diesen Buchstaben zusammengesetzten algebraischen Ausdruck vor, so wird man die Linie, deren Maaßzahl x ist, wenn im besondern Falle für die Buchstaben a, b, c . . . bestimmte Zahlen gegeben sind, dadurch erhalten können, daß man den Zahlenwerth von x berechnet und dann die Einheit so oft auf eine Linie aufträgt, als dieser Werth anzeigt. — Es tritt aber auch häufig der Fall ein, daß nicht sowohl die Werthe von a, b, c . . . in bestimmten Zahlen, sondern die Linien selbst, deren Maaßzahlen jene Buchstaben vorstellen, gegeben sind, und verlangt wird, mit Hülfe dieser Linien durch geometrische Construction eine Linie darzustellen, deren Maaßzahl dem Ausdrucke x in allen Fällen gleich ist, welches auch immer die Einheit und die besondern Zahlenwerthe der Buchstaben a, b, c . . . sein mögen. Man sagt dann: der Ausdruck x solle geometrisch construirt werden.

*§ 269. Aufgabe.

Die folgenden Ausdrücke geometrisch zu construiren:

1) $x = a + b$, 2) $x = a - b$,

3) $x = \frac{a \,.\, b}{c}$, 4) $x = \frac{a^2}{c}$,

5) $x = \sqrt{a.b}$, 6) $x = a\sqrt{m}$,

7) $x = \sqrt{a^2+b^2}$, 8) $x = \sqrt{a^2-b^2}$,

wo in (6) m nicht die Maaßzahl einer Linie, sondern überhaupt irgend eine absolute Zahl und also ohne Dimension sein soll.

Aufl. Die Constructionen von (1) und (2) sind an sich klar.

Die Gleichung (3) liefert folgende Proportion:

$$c:b = a:x;$$

hiernach ist x die vierte Proportionale zu a, b, c *) und kann daher nach § 201 leicht construirt werden.

Die Gleichung (4) ist ein besonderer Fall von (3), der entsteht, wenn man $b = a$ setzt.

Die Gleichung (5) läßt folgende Umformungen zu:

$$x^2 = a.b \text{ oder } a:x = x:b.$$

Demnach wird x erhalten, wenn man nach § 202 die mittlere Proportionale zu a und b sucht.

Aus der Gleichung (6) folgt

$$x^2 = ma^2 = ma.a.$$

Man findet daher x nach (5) als mittlere Proportionale zu ma und a.

In der Gleichung (7), die sich auch so schreiben läßt:

$$x^2 = a^2+b^2,$$

ist x die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Catheten a und b.

In der Gleichung (8) oder

$$x^2 = a^2-b^2$$

ist von einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse a und eine Cathete b gegeben, die andere gesucht. Diese wird erhalten, wenn man den einen Schenkel eines rechten Winkels = b macht und aus dem Endpunkte einen Kreis mit a beschreibt, der vom andern Schenkel x abschneidet. — Oder man beschreibt über a einen Halbkreis und legt b als Sehne hinein. Die Verbindungslinie der Endpunkte von a und b ist x.

*§ 270. Zusatz.

Außer den im vorherg. § angeführten Ausdrücken sind auch noch die, (aber keine andern,) welche aus jenen zusammengesetzt

*) Auch hier wird der Kürze wegen, wie schon in der Bemerkung zu § 218 angegeben worden, die Linie, deren Maaßzahl x ist, die Linie x genannt.

oder auf dieselben zurückführbar sind, einer geometrischen Construction fähig; so folgende Beispiele:

$$9)\quad x = \frac{abc}{df}.$$

Man suche zuerst eine Linie $z = \frac{ab}{d}$ und dann $x = \frac{zc}{f}\ \left(= \frac{abc}{df}\right)$, beides nach (3) im vorherg. §.

$$10)\quad x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}.$$

Bestimmt man erst eine Linie z aus der Gleichung

$$z^2 = a^2 + b^2,$$

so ist

$$x = \sqrt{z^2 - c^2}.$$

$$11)\quad x = \sqrt{a^2 + ab}.$$

Man suche eine Linie z aus der Gleichung

$$z^2 = ab;$$

dann ist

$$x = \sqrt{a^2 + z^2}.$$

Oder, was viel bequemer ist, da sich die Gleichung (11) auch so umformen läßt:

$$x = \sqrt{a(a + b)},$$

man suche die mittlere Proportionale zu a und $a + b$.

$$12)\quad x = \sqrt{ab + cd}.$$

Sucht man zuerst zwei Linien u und v aus den Gleichungen

$$u^2 = ab \text{ und } v^2 = cd,$$

so ist

$$x = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Oder man setze

$$x = \sqrt{a\left(b + \frac{cd}{a}\right)}$$

und bestimme erst eine Linie

$$z = \frac{cd}{a}$$

und dann

$$x = \sqrt{a(b + z)}.$$

Bemerkung. Durch die letzten Paragraphen wird man in vielen Fällen in den Stand gesetzt, geometrische Aufgaben auf die Art zu lösen, daß man für die Maaßzahlen der gegebenen Linien irgend Buchstaben setzt, aus diesen die Maaßzahlen der gesuchten Linien, von deren Kenntniß die Auflösung der Aufgabe abhängt, berechnet und diese Ausdrücke dann nach dem Vorhergehenden construirt. Beispiele liefern die nächsten Paragraphen.

*§ 271. Aufgabe.

Ein Rechteck in ein anderes mit einer gegebenen Seite zu verwandeln.

Aufl. Das gegebene Rechteck habe die Seiten a und b, die gegebene Seite des neuen Rechtecks heiße c, die gesuchte x. Dann hat man zur Bestimmung von x die Gleichung:

$$cx = ab,$$

also $$x = \frac{ab}{c} \text{ oder } c:b = a:x.$$

Construction. Das gegebene Rechteck sei DEFG (Fig. 173); man mache DH = c, ziehe HL (= a) parallel zu DG und ziehe DL bis zum Einschnitte in die verlängerte EF, so ist EN = x; denn es verhält sich offenbar

$$c:b = a:EN.$$

Zieht man nun noch NM ∥ ED und verlängert DG und HL bis zum Einschnitte in diese Parallele, so ist DHOM das verlangte Rechteck.

Beweis. Die durch Rechnung aufgefundene Construction läßt sich leicht rein geometrisch nachweisen. Es ist nehmlich nach § 168 Rechteck ML = LE, also auch ML + GH = LE + GH, d. h. MH = GE.

Anm. Eines solchen geometrischen Beweises bedarf es nun zwar eigentlich nicht, wenn man richtig gerechnet und nach Anleitung der §§ 269 und 270 construirt hat. Andererseits aber gewährt diese Ableitung und Vergleichung des arithmetischen und geometrischen Verfahrens dem Anfänger eine eben so nützliche, als anziehende Uebung.

*§ 272. Aufgabe.

Ein Quadrat zu zeichnen, welches fünfmal so groß ist, als ein gegebenes Quadrat.

Aufl. Hat das gegebene Quadrat die Seite a, das gesuchte die Seite x, so soll sein $x^2 = 5a^2$.

Diese Gleichung läßt sich so schreiben:

$$1) \quad x^2 = 5a \,.\, a,$$

und dann wird x als mittlere Proportionale zu a und 5a erhalten. — Man kann aber der Gleichung (1) auch die Form

$$2) \quad x^2 = (2a)^2 + a^2$$

geben, und dann ist x die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, welches die Catheten a und 2a hat.

Endlich kann man auch setzen

$$3) \quad x^2 = 9a^2 - 4a^2 = (3a)^2 - (2a)^2,$$

wonach sich x als Cathete eines rechtwinkligen Dreiecks ergiebt, in welchem die andere Cathete $= 2a$ und die Hypotenuse $= 3a$ ist.

*§ 273. Aufgabe.

Eine gegebene Linie in stetige Proportion zu theilen.

Aufl. Die gegebene Linie sei a, der größere Abschnitt x, also der kleinere $a - x$; dann ist die Bedingungsgleichung

$$a : x = x : a - x$$

oder

$$x^2 = a^2 - ax$$

oder

$$x^2 + ax = a^2.$$

Hieraus folgt auf bekannte Weise (vergl. Thl. 1. § 190)

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}a^2} = \frac{a(-1 \pm \sqrt{5})}{2}.$$

Weil aber x als Maaßzahl einer Linie eine absolute Zahl sein muß, so kann vor der Wurzel nur das Zeichen (+) gelten.

Construction. Man errichte im Endpunkte B der Linie $CB = a$ (Fig. 160) ein Loth $BE = \tfrac{1}{2}a$ und ziehe $CE (= \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}a^2})$, schneide dann EB von EC gleich EF ab, so ist $CF = x$. Wenn man daher $CD = CF$ macht, so ist D der gesuchte Theilungspunkt.

Anm. Die hier angegebene Construction stimmt ganz mit der in § 238 aufgestellten überein, wo man auch den geometrischen Beweis derselben nachzusehen hat. Durch die Rechnung wird aber jene Construction in ein viel klareres Licht gestellt, indem man hier sogleich die Gründe der einzelnen Schritte des Verfahrens, und wie dieselben dem Ziele entgegenführen, klar und deutlich einsieht, was weit weniger von der rein geometrischen Behandlung gilt.

*§ 274. Aufgabe.

Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, dessen Umfang $= p$ gegeben ist.

Aufl. Bezeichnen wir die Hypotenuse mit y und die gleichen Catheten mit x, so ist

$$1)\quad y + 2x = p$$

und nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$2)\quad y^2 = 2x^2.$$

Aus (1) folgt $y = p - 2x$; dieser Werth, in die zweite Gleichung eingesetzt, verwandelt dieselbe in

$$p^2 - 4px + 4x^2 = 2x^2$$

oder

$$2x^2 - 4px = -p^2$$

oder

$$x^2 - 2px = \frac{-p^2}{2},$$

folglich $x = p - \sqrt{\frac{p^2}{2}} = p - \sqrt{\frac{2p^2}{4}} = p\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$

und $y = p - 2x \quad = -p + \sqrt{2p^2} = p(-1+\sqrt{2})$.

Da nehmlich die Werthe von x und y offenbar $> o$, aber $< p$ sein müssen, so kann in dem Werthe von x nur das Zeichen (—) und in dem Werthe von y das Zeichen (+) vor dem Wurzelausdrucke gelten.

Construction. Benutzen wir hierzu den Werth von $y = -p + \sqrt{2p^2}$, so ergiebt sich uns folgendes Verfahren: — Man zeichne einen rechten Winkel BAC (Fig. 174), schneide von beiden Schenkeln $p = AB = AC$ ab, ziehe BC $(= \sqrt{2p^2})$ und beschreibe mit $AC = p$ um C einen Kreis, welcher BC in D schneidet, so ist $BD = -p + \sqrt{2p^2} = y$, und wenn man $DE \parallel AC$ zieht, BDE das verlangte Dreieck.

Beweis. Das Dreieck BED ist zunächst rechtwinklig und gleichschenklig, weil es dem Dreiecke BAC ähnlich ist, und es hat auch den verlangten Umfang p. Denn wenn wir $DF \perp BC$ ziehen, so ist Winkel $EDF = 45^0$, folglich $DE = EF$ und $DF = BD$, und da nach § 133 $DF = AF$ ist, $BE + DE + BD = BE + EF + AF = p$, w. z. e. w.

*§ 275. Aufgabe.

Ein Rechteck zu zeichnen, von welchem der Umfang $= p$ und der Inhalt $= a^2$ gegeben ist.

Aufl. Sind x und y die Seiten des gesuchten Rechtecks, so soll sein:

1) $2x + 2y = p$

und 2) $xy = a^2$.

Aus (1) folgt 3) $x = \frac{1}{2}p - y$.

Dieß in (2) eingesetzt, giebt:

$$\tfrac{1}{2}py - y^2 = a^2.$$

oder $y^2 - \frac{1}{2}py = -a^2$.

Daraus folgt auf bekannte Weise

$$y = \tfrac{1}{4}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{16}p^2 - a^2}$$

und hieraus und aus (3) $x = \frac{1}{4}p \mp \sqrt{\frac{1}{16}p^2 - a^2}$.

Obgleich für x und y zwei Werthe gefunden sind, so sieht man doch leicht, daß die Aufgabe nur eine Auflösung hat, da die Werthe von x und y sich vertauschen lassen. Soll also x die größere, y die kleinere Seite sein, so wird man zu setzen haben:

$$x = \tfrac{1}{4}p + \sqrt{\tfrac{1}{16}p^2 - a^2}$$

und $y = \frac{1}{4}p - \sqrt{\frac{1}{16}p^2 - a^2}$.

Determination. Da die Werthe von x und y absolute Zahlen und also jedenfalls reell sein müssen, so muß der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv oder Null, also jedenfalls

$$a^2 \leqq \frac{1}{16}p^2, \text{ d. h. } a \leqq \frac{1}{4}p$$

sein. Der größte Werth, welchen hiernach a haben darf, wenn ein Rechteck von dem vorgeschriebenen Umfange möglich sein soll, ist also $\frac{1}{4}p$. Für diesen Werth ($a = \frac{1}{4}p$) wird $x = \frac{1}{4}p = y$, und das gesuchte Rechteck ist folglich in diesem Falle ein Quadrat. Hieraus ergiebt sich, daß von allen Rechtecken mit gleichem Umfange das Quadrat den größten Inhalt hat. (Vergl. § 249.)

Constr. Man bilde ein rechtwinkliges $\triangle$ CDE (Fig. 175) mit der Cathete $CD = a$ und der Hypotenuse $CE = \frac{1}{4}p$ und beschreibe aus E mit CE einen Kreis, der die beiderseits verlängerte DE in F und G schneidet, so ist $FD = y$ und $DG = x$. Wenn man nun noch CD um $DH = DF$ verlängert und $HK \parallel DG$, $GK \parallel DH$ zieht, so ist DHKG das verlangte Rechteck.

Beweis. Denn nach der Construction ist $DH + DG = FG = \frac{1}{2}p$, folglich der ganze Umfang $= p$. Das Rechteck hat aber auch den verlangten Inhalt. Denn es ist bekanntlich

$$FD : DC = DC : DG,$$

d. h. $$y : a = a : x,$$

also $$xy = a^2.$$

* § 276. Aufgabe.

In einen Kreis ein Rechteck zu zeichnen, welches einen vorgeschriebenen Umfang hat.

Aufl. Bezeichnet man den Umfang des Rechtecks mit 2a, den Radius des Kreises mit r, so hat man zur Bestimmung der Seiten x und y des Rechtecks die Gleichungen:

$$1) \quad x + y = a,$$

und weil der Durchmesser mit den Seiten des Rechtecks ein rechtwinkliges Dreieck bildet:

$$2) \quad x^2 + y^2 = 4r^2.$$

Aus (1) folgt $$3) \quad x = a - y.$$

Dieß in (2) eingesetzt giebt:

$$(a - y)^2 + y^2 = 4r^2$$

oder $$a^2 - 2ay + 2y^2 = 4r^2$$

oder $$y^2 - ay = 2r^2 - \frac{1}{2}a^2,$$

woraus weiter folgt: $$y = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{2r^2 - \frac{1}{4}a^2},$$

und vermöge der Gleichung (3)

$$x = \frac{1}{2}a \mp \sqrt{2r^2 - \frac{1}{4}a^2}.$$

Auch dießmal lassen sich die Werthe von x und y vertauschen, und die Aufgabe hat also nur eine Auflösung. Ist daher x die größere, y die kleinere Seite, so hat man:

$$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{2r^2 - \frac{1}{4}a^2}$$

und $$y = \frac{1}{2}a - \sqrt{2r^2 - \frac{1}{4}a^2}.$$

Determination. Soll die Aufgabe möglich sein, so müssen vor allen Dingen x und y reell sein, d. h. es muß

$$1)\quad \frac{1}{4}a^2 \leqq 2r^2 \text{ oder } \frac{1}{2}a \leqq r\sqrt{2}$$

sein. Nimmt man gerade $\frac{1}{2}a = r\sqrt{2}$ an, so wird $x = \frac{1}{2}a = y$, und das zu zeichnende Rechteck ist also ein Quadrat. Demnach hat unter allen in denselben Kreis zu zeichnenden Rechtecken das Quadrat den größten Umfang. — Es reicht aber nicht aus, daß x und y reell sind; sie müssen auch beide > 0 und $< 2r$ sein. Das Erste versteht sich für x von selbst, für y ist in dieser Hinsicht erforderlich, daß

$$\frac{1}{2}a > \sqrt{2r^2 - \frac{1}{4}a^2},$$

oder $$\frac{1}{4}a^2 > 2r^2 - \frac{1}{4}a^2,$$

also $$\frac{1}{2}a^2 > 2r^2$$

oder $$2)\quad a > 2r$$

ist, was auch anderweitig leicht erhellt. — Ferner sollen x und y $< 2r$ sein. Gilt dieß von x, so wird es um so mehr auch für y gelten, und jenes ist der Fall, wenn man hat:

$$2r > \frac{1}{2}a + \sqrt{2r^2 - \frac{1}{4}a^2}$$

oder $$2r - \frac{1}{2}a > \sqrt{2r^2 - \frac{1}{4}a^2},$$

folglich da nach (1) $\frac{1}{2}a$ höchstens $= r\sqrt{2}$, also jedenfalls $\frac{1}{2}a < 2r$ ist: $4r^2 - 2ar + \frac{1}{4}a^2 > 2r^2 - \frac{1}{4}a^2$

oder $$2r^2 - 2ar + \frac{1}{2}a^2 > 0,$$

also auch $$a^2 - ar + \frac{1}{4}a^2 > 0,$$

d. h. $$(r - \frac{1}{2}a)^2 > 0,$$

was jedenfalls stattfindet, wie auch immer a und r angenommen sein mögen, so lange nur nicht gerade $r = \frac{1}{2}a$ ist. Demnach hängt die Möglichkeit der Aufgabe von den zwei Bedingungen ab:

$$1)\quad \frac{1}{2}a \leqq r\sqrt{2} \text{ und } 2)\quad \frac{1}{2}a > r.$$

Constr. Um einen der beiden obigen Ausdrücke, z. B. x, zu construiren, hat man zunächst eine Linie u aus der Gleichung $u^2 = 2r^2 = r^2 + r^2$ und dann $v = \sqrt{u^2 - \frac{1}{4}a^2}$ zu suchen. Hierzu

gelangt man so: Man zeichne zwei sich senkrecht schneidende Radien AC und BC (Fig. 176), ziehe AB $(=\sqrt{2r^2})$, beschreibe um AB einen Halbkreis, lege in diesen $\frac{1}{2}a = AD$ als Sehne ein und ziehe DB $(=\sqrt{u^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{2r^2 - \frac{1}{4}a^2})$. Verlängert man nun AD bis zur Peripherie des gegebenen Kreises, so ist die Verlängerung DE = DB, — (denn wenn man BE zieht, so ist W. BED = 45°, weil er als Peripheriewinkel auf dem Quadranten AB steht; da nun W. BDE = 90° ist, so ist auch W. DBE = 45°, daher DE = DB). — Demnach ist AE = x, und wenn man noch EF, FG || AE und AG zieht, so ist AEFG das verlangte Rechteck.

Beweis. Um zu zeigen, daß dieses Rechteck den vorgeschriebenen Umfang 2a hat, beschreibe man aus B mit AB einen Kreis, der die verlängerte AE in H schneidet. Dann ist W. EHF = 45°, weil der zugehörige Bogen AF = 90° (= W. ABF) ist; folglich ist EF = EH und AE + EF = AH; nun ist aber die Sehne AH durch das Loth BD halbirt, also DH = AD = $\frac{1}{2}a$ und AH = a, daher auch AE + EF = a, folglich der ganze Umfang = 2a.

*§ 277. Aufgabe.

In ein Dreieck ein Rechteck so zu zeichnen, daß zwei Ecken in die Grundlinie, die beiden andern in die Seiten des Dreiecks fallen, und das Rechteck einem gegebenen Rechtecke gleich wird.

Aufl. Die Höhe des Dreiecks sei h, die Grundlinie g; man verwandle — was für das Folgende Bequemlichkeit gewährt — nach § 271 das gegebene Rechteck in ein solches, das mit dem Dreieck einerlei Grundlinie g hat, und nenne die Höhe dieses Rechtecks c, so findet man, wenn man sich das gesuchte Rechteck bereits in das Dreieck gezeichnet denkt (Fig. 177) und seine Seiten mit x und y bezeichnet, die Bestimmungsgleichungen:

$$LM : BC = AG : AK$$

oder

$$1)\quad y : g = h - x : h.$$

$$2)\quad xy = cg.$$

Aus (1) ist $hy = gh - gx$, also $y = \frac{gh - gx}{h}$.

Durch Substitution dieses Werthes von y verwandelt sich (2) in

$$\frac{ghx - gx^2}{h} = cg.$$

oder

$$ghx - gx^2 = cgh$$

oder

$$x^2 - hx = -ch.$$

Hieraus folgt $$x = \frac{1}{2}h \pm \sqrt{\frac{1}{4}h^2 - ch} = \frac{1}{2}h \pm \sqrt{h(\frac{1}{2}h - c)}$$
und $$y = \frac{g(h-x)}{h} = \frac{g}{h}[\frac{1}{2}h \mp \sqrt{h(\frac{1}{4}h - c)}].$$
Man erhält hiernach für y und x zwei Paar verschiedener Werthe, und die Aufgabe läßt folglich eine doppelte Auflösung zu.

Determination. Soll die Aufgabe zu lösen sein, so muß
$$c \leqq \frac{1}{4}h$$
sein. Nimmt man $c = \frac{1}{4}h$ an, so fallen die beiden Werthe von x zusammen in $x = \frac{1}{2}h$ und die beiden Werthe von y desgleichen in $y = \frac{1}{2}g$. Dieses größte Rechteck, welches halb so groß ist, als das Dreieck, wird erhalten, wenn man die beiden Seiten des Dreiecks halbirt, die Halbirungspunkte verbindet und durch dieselben Parallelen mit der Höhe zieht. Ist aber $c < \frac{1}{4}h$, so bekommen x und y doppelte reelle und positive Werthe, die beziehlich kleiner sind, als h und g, und die Aufgabe läßt also dann jedenfalls zwei verschiedene Auflösungen zu.

Constr. Die beiden Werthe von x lassen sich so umformen:
$$x = \frac{1}{2}h \pm \sqrt{\frac{1}{2}h(\frac{1}{2}h - 2c)}.$$
Um diesen Ausdruck zu construiren, hat man zunächst die mittlere Proportionale zwischen $\frac{1}{2}h$ und $\frac{1}{2}h - c$ zu suchen. Zu dieser gelangt man so: Man halbire AK = h in D, beschreibe über AD einen Halbkreis, mache AE = 2c, errichte in E das Loth EF und ziehe DF $[= \sqrt{\frac{1}{2}h(\frac{1}{2}h - 2c)}]$. Beschreibt man dann weiter, um x zu erhalten, aus D mit DF einen Kreis, der AK in G und H schneidet, so ist der größere Werth von x durch KG, der kleinere durch KH dargestellt, wonach sich die fernere Construction der gesuchten Rechtecke LMON und PQSR von selbst ergiebt.

Beweis. Das Verhältniß des Rechtecks LMON zu dem gegebenen Rechtecke wird ausgedrückt durch
$$\frac{GK \,.\, LM}{c \,.\, g};$$
für diesen Ausdruck kann man, da LM : g = AG : h ist, auch
$$\frac{GK \,.\, AG}{c \,.\, h}$$
setzen, oder da AD = DK, DG = DH, also auch AG = HK und AH = GK ist: $$\frac{AH \,.\, AG}{c \,.\, h}.$$

Zieht man AF, so ist W. AFD = 90°, folglich berührt AF den Kreis GFH, und es verhält sich nach § 143, 3

$$AG : AF = AF : AH,$$

woraus $AG \,.\, AH = AF^2$ hervorgeht. Weiter ist aber auch im rechtwinkligen △ AFD

$$AF^2 = AD \,.\, AE.$$

Demnach verwandelt sich das obige Verhältniß in

$$\frac{AD \,.\, AE}{c \,.\, h} = \frac{\frac{1}{2}h \,.\, 2c}{c \,.\, h} = \frac{c \,.\, h}{c \,.\, h},$$

d. h. das Rechteck LMON ist dem gegebenen Rechtecke gleich.

Eben so ist Rechteck

$$\frac{PQSR}{c \,.\, g} = \frac{HK \,.\, PQ}{c \,.\, g} = \frac{HK \,.\, AH}{c \,.\, h} = \frac{AG \,.\, AH}{c \,.\, h},$$

woraus, wie man so eben gesehen hat, Rechteck PQSR = c . g folgt.

*§ 278. Zusatz.

1) Von der vorhergehenden Aufgabe ist die folgende nicht wesentlich verschieden: In ein Dreieck ABC (Fig. 178) ein Parallelogramm BDEF so zu zeichnen, daß zwei Seiten desselben BD und BF in zwei Seiten des Dreiecks AB und BC fallen, und die gegenüberstehende Ecke E in die dritte Seite AC fällt. — Man wird nehmlich den gegebenen Inhalt zunächst durch ein Parallelogramm GC ausdrücken, welches den Winkel B und eine Seite BC mit dem Dreieck gemeinschaftlich hat. Setzt man dann der Kürze wegen AB = h, BC = g, BG = c, BD = x, BF = y, so hat man zur Bestimmung von x und y die Gleichungen:

1) $y : g = h - x : h$

und 2) $x \,.\, y = c \,.\, g,$

indem bei gleichen Parallelogrammen mit einem gemeinschaftlichen Winkel die Producte der einschließenden Seiten nach § 213 gleich sind. Da diese Gleichungen mit denen des vorherg. § identisch sind, so ist auch der weitere Gang der Auflösung im Wesentlichen derselbe.

*§ 279. Aufgabe.

Ein Quadrat in ein gleichseitiges Dreieck zu verwandeln.

Aufl. Die Seite des gegebenen Quadrates ABCD (Fig. 179) sei a, die Seite des gesuchten Dreiecks KFH sei x, die Höhe y, so ist 1) $\frac{1}{2}xy = a^2$

und im rechtwinkligen Dreieck FBH

2) $y^2 + \frac{1}{4}x^2 = x^2$ oder $y^2 = \frac{3}{4}x^2.$

Aus (1) folgt 3) $x = \frac{2a^2}{y}$;

dieß in (2) eingesetzt, giebt: $y^2 = \frac{3a^4}{y^2}$ oder $y^4 = 3a^4$,

also $y = a\sqrt[4]{3}$

und aus (3) $x = \frac{2a}{\sqrt[4]{3}}$

oder wenn man im Zähler und Nenner mit $\sqrt[4]{27}$ multiplicirt,

$$x = \tfrac{2}{3} a\sqrt[4]{27}.$$

Constr. Zur Zeichnung ist der Werth von y am bequemsten; aus der obigen Gleichung

$$y^4 = 3a^4 = 3a^2 \cdot a^2$$

hat man nehmlich $y^2 = a\sqrt{3a^2}$.

Hiernach ist zuerst eine Linie v aus der Gleichung $v^2 = 3a^2$ und dann y aus der Gleichung $y^2 = a \cdot v$ zu suchen. Daraus ergiebt sich folgendes Verfahren:

Man beschreibe aus C mit 2BC = 2a einen Kreis, der die verlängerte AB in E schneidet, (so ist $BE = \sqrt{3a^2} = v$); man mache ferner BG = BE und beschreibe über GC einen Halbkreis, der AE in F schneidet, (so ist $BF = \sqrt{a \cdot v} = y$); endlich ziehe man FH ‖ EC, mache BK = BH und ziehe FK, so ist KFH das verlangte gleichseitige Dreieck.

Beweis. Daß dasselbe gleichseitig ist, erhellt leicht aus der Construction; denn da FH ‖ EC und BC = ½EC gemacht ist, so ist auch BH = ½FH, also KH = FH = FK. Das Dreieck hat aber auch mit dem Quadrate gleichen Inhalt. Es ist nehmlich

1) $\triangle FBH : EBC = BF^2 : BE^2 = BF^2 : BG^2$,

oder da $BG : BF = BF : BC$,

also auch $BG^2 : BF^2 = BF^2 : BC^2$ ist:

2) $\triangle FBH : EBC = BC^2 : BF^2$.

Nun ist aber $BC^2 = ABCD$, $BF^2 = BC \cdot BG = BC \cdot BE = 2\triangle EBC$; hiernach verwandelt sich die Gleichung (2) in

3) $\triangle FBH : EBC = ABCD : 2EBC$,

woraus $\triangle FBH = \tfrac{1}{2} ABCD$,

also $\triangle FKH = ABCD$

hervorgeht.

Uebungsaufgaben.

Aufgabe 351. Eine gegebene Linie a um ein gesuchtes Stück x so zu verlängern, daß die Verlängerung mittlere Proportionale wird zwischen der gegebenen und der ganzen verlängerten Linie.

Aufl. $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$.

Aufgabe 352. Eine gegebene Linie a in zwei Theile x und y so zu theilen, daß der Unterschied der Quadrate beider Theile einem gegebenen Quadrate b^2 gleich wird.

Aufl. $x = \frac{a^2+b^2}{2a}$ und $y = \frac{a^2-b^2}{2a}$.

Aufgabe 353. Eine gegebene Linie a in zwei Theile x und y so zu theilen, daß das Rechteck aus beiden Theilen einem gegeben Quadrate b^2 gleich wird.

Aufl. $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ und $y = \frac{1}{2}a \mp \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$.

Aufgabe 354. Von einem Rechtecke sind die beiden Seiten a und b gegeben; man soll die größere Seite a in zwei Theile x und y so theilen, daß die Summe der Quadrate der beiden Theile dem gegebenen Rechtecke gleich wird.

Aufl. $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}a^2}$ und $y = \frac{1}{2}a \mp \sqrt{\frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}a^2}$.

Aufgabe 355. Eine gegebene Linie a um ein gesuchtes Stück x so zu verlängern, daß das Rechteck aus der Verlängerung und der ganzen verlängerten Linie einem gegebenen Quadrate b^2 gleich wird.

Aufl. $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a + b^2}$.

Aufgabe 356. Eine gegebene Linie a um ein gesuchtes Stück x so zu verlängern, daß die Summe aus dem Quadrate der Verlängerung und dem Quadrate der ganzen verlängerten Linie mmal so groß wird, als das Quadrat der gegebenen Linie.

Aufl. $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{2}ma^2 - \frac{1}{4}a^2} = a\left(\frac{-1+\sqrt{2m-1}}{2}\right)$.

Aufgabe 357. Ein Quadrat zu zeichnen, von welchem der Unterschied zwischen der Diagonale y und der Seite x gleich d gegeben ist.

Aufl. $x = d + \sqrt{2d^2} = d(1+\sqrt{2})$.

Aufgabe 358. Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, von welchem die Summe aus der Hypotenuse y und der Cathete x gleich f gegeben ist.

Aufl. $x = -f + \sqrt{2f^2} = f(-1+\sqrt{2})$
$y = 2f - \sqrt{2f^2} = f(2-\sqrt{2})$.

Aufgabe 359. Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, von welchem die Hypotenuse = a und die Differenz der Catheten $x - y = d$ gegeben ist.

Aufl. $x = \frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}d^2}$ und $y = -\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}d^2}$.

Aufgabe 360. Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, von welchem die eine Cathete = a und die Summe aus der Hypotenuse x und der andern Cathete y gleich f gegeben ist.

Aufl. $x = \frac{f^2 + a^2}{2f}$ und $y = \frac{f^2 - a^2}{2f}$.

Aufgabe 361. Ueber einer gegebenen Linie a, als Cathete, ein rechtwinkliges Dreieck so zu zeichnen, daß die andere Cathete x mittlere Proportionale zwischen der gegebenen Cathete a und der Hypotenuse y wird.

Aufl. $y = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$.

Aufgabe 362. Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, von welchem die Höhe = h gegeben ist.

Aufl. Die Seite x ist $= \sqrt{\frac{4}{3}h^2} = \frac{2h\sqrt{3}}{3}$.

Aufgabe 363. Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, von welchem der Unterschied zwischen der Seite x und der Höhe y gleich d gegeben ist.

Aufl. $x = 4d + \sqrt{12d^2} = 2d(2+\sqrt{3})$ und $y = 3d + \sqrt{12d^2} = d(3+2\sqrt{3})$.

Aufgabe 364. Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, von welchem die Seite = a und die Summe aus der Grundlinie 2x und der Höhe y gleich b gegeben ist.

Aufl. $x = \frac{2}{5}b \pm \sqrt{\frac{1}{5}a^2 - \frac{1}{25}b^2} = \frac{2b \pm \sqrt{5a^2 - b^2}}{5}$

und $y = \frac{1}{5}b \mp \sqrt{\frac{4}{5}a^2 - \frac{4}{25}b^2} = \frac{b \mp 2\sqrt{5a^2 - b^2}}{5}$.

Aufgabe 365. In einen Kreis, dessen Durchmesser = d gegeben ist, ein Rechteck zu zeichnen, welches einem gegebenen Quadrate a^2 gleich ist.

Aufl. Ist die größere Seite des gesuchten Rechtecks x, die kleinere y, so ist

$$x = \sqrt{\frac{d^2 + \sqrt{d^4 - 4a^4}}{2}} = \frac{\sqrt{d^2 + 2a^2} + \sqrt{d^2 - 2a^2}}{2}$$

und $$y = \sqrt{\frac{d^2 - \sqrt{d^4 - 4a^4}}{2}} = \frac{\sqrt{d^2 + 2a^2} - \sqrt{d^2 - 2a^2}}{2}.$$

Aufgabe 366. Ein Trapez durch eine Parallele zu den beiden parallelen Seiten zu halbiren.

Aufl. Sind a und b die beiden parallelen Seiten, h die Höhe des Trapezes und z der Unterschied zwischen der gesuchten Theilungslinie

und der kleinern Parallele, endlich x der Abstand dieser beiden Linien von einander, so ist

$$z = -b + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \text{ und } x = \frac{hz}{a-b}.$$

Aufgabe 367. Zwischen den Schenkeln eines Winkels BAC (Fig. 180) ist ein Punkt D gegeben. Man soll durch diesen Punkt eine die Schenkel schneidende Linie XY so ziehen, daß das abgeschnittene Dreieck XAY einen vorgeschriebenen Inhalt hat.

Aufl. Wenn man durch D mit den Schenkeln des gegebenen Winkels die Parallelen DE und DF zieht, so ist, da der Punkt D gegeben ist, auch AE und AF als bekannt anzusehen. Man setze also der Kürze wegen AE = a und AF = b und verwandle hierauf die Figur, welche den gegebenen Inhalt ausdrückt, in ein Dreieck GHK, in welchem ein Winkel G = A und eine Seite GH = b ist; die andere dem Winkel G anliegende Seite GK sei = c. — Setzen wir nun AX = x und AY = y, so verhält sich, da FD || AX ist:

$$FY : AY = DF : AX$$

oder

$$1)\quad y-b : y = a : x,$$

und da △ AXY = GHK sein soll, so ist nach *§ 212

$$2)\quad xy = bc.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich

$$x = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ac}}{2} \text{ und } y = \frac{b(c \mp \sqrt{c^2-4ac}}{2a},$$

zwei Ausdrücke, welche sich ganz in derselben Art construiren lassen, wie in § 277 gezeigt ist.

und der Gleichung 2), welche x der Abschnitt einer . . . Linien von . . . abgibt, ist

$$y = \frac{a+b}{2} \quad \text{und} \quad x = \frac{ab}{a-b}$$

Aufgabe 237. Zwischen den Schenkeln eines Winkels BAC (Fig. 166) ist ein Punkt D gegeben. Man soll durch diesen Punkt eine die Schenkel schneidende Linie XY so ziehen, daß das abgeschnittene Dreieck AXY einen vorgeschriebenen Inhalt hat.

Aufl. Wenn man durch D mit den Schenkeln des gegebenen Winkels die Parallelen DE und DF zieht, so ist, da der Punkt D gegeben ist, auch AE und AF als bekannt anzusehen. Man setze also der Kürze wegen AE = a und AF = b und verwandle hierauf das Dreieck, welches den gegebenen Inhalt enthalten soll, in ein Dreieck GHK, in welchem ein Winkel G = A und die Seite GH = a ist; die andere Seite GK desselben ist dann eine bekannte Größe, welche = c sein mag. Setzt man nun AX = x und AY = y, so verhält sich, da ED ∥ AY ist,

$$EY : AY = ED : AX$$

oder

$$1) \quad y - b : y = a : x.$$

Da nun △ AXY = GHK sein soll, so ist nach § 212

$$2) \quad xy = bc.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man

$$x = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ac}}{2} \quad \ldots \quad \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ac}}{2a}$$

Diese Ausdrücke lassen sich ganz so geometrisch darstellen, wie in § 277 gezeigt ist.

Zweite Abtheilung.

Stereometrie.

Einleitung.

Bemerkung 1. Nach der dreifachen Ausdehnung des Raumes zerfällt die Geometrie (Raumlehre) in drei Theile: Longimetrie, Planimetrie und Stereometrie. Die Longimetrie *) beschränkt sich auf die Betrachtung einer einzigen Ausdehnung, die Planimetrie betrachtet das nach zwei Richtungen Ausgedehnte, läßt aber die dritte Ausdehnung noch unberücksichtigt; die Stereometrie nimmt zugleich auf alle drei Ausdehnungen Rücksicht. Die Longimetrie stellt alle ihre Betrachtungen in einer geraden Linie an; die Planimetrie ist mit ihren Constructionen an ein und dieselbe ebene Fläche gebunden, über welche sie nicht hinausgeht; ihre Objecte liegen entweder wirklich in derselben Ebene oder können doch als in derselben Ebene liegend vorgestellt werden. Nur die Stereometrie kennt keine Beschränkung und darf sich frei im Raume nach allen drei Richtungen hin bewegen.

Die Longimetrie kann es allein mit geraden Linien zu thun haben; die krumme Linie und die ebene Fläche, da an ihnen zugleich zwei Dimensionen auftreten, gehören der Planimetrie an; eben so können krumme Flächen und Körper, da sie nicht mehr in eine Ebene gebracht werden können, da an ihnen zugleich drei Dimensionen auftreten, allein Gegenstand der Stereometrie sein.

So wie aber die Planimetrie sich keineswegs auf die Vergleichung des Inhalts und auf die Ausmessung der vollständig begrenzten ebenen Flächen (Abschnitt 9, 11 und 12 in diesem Lehrbuche) beschränkt, sondern diejenigen Sätze, welche sich auf die gegenseitige Abhängigkeit der Länge und Lage gerader Linien beziehen, den bei weitem größten Theile der Planimetrie (Abschnitt

---

*) Vergl. die Anm. zu § 3 der Planimetrie.

1 — 8 und 10 in diesem Lehrbuche) ausmachen, so hat es auch die Stereometrie weder ausschließlich, noch vorzugsweise mit der Ausmessung der vollständig begrenzten Körper zu thun; vielmehr bilden die Sätze über die gegenseitige Lage der Linien und Ebenen im Raume (sowohl in theoretischer, als praktischer Hinsicht,) wenn nicht den wichtigsten, doch gewiß einen eben so wichtigen Theil der Stereometrie (Abschn. 1 — 3 in diesem Lehrb.).

Bemerkung 2. Die Ebene selbst, in welcher die Planimetrie alle ihre Constructionen auszuführen hat, kann offenbar in der Planimetrie niemals Gegenstand der Betrachtung werden, da ein Betrachten dieser Ebene zugleich ein Heraustreten aus derselben, also ein Verlassen des Feldes der Planimetrie fordert. Durch dieses Heraustreten aus der einen Ebene, an welche die Planimetrie gebunden war, ist der erste Schritt in die Stereometrie gethan. Diese Ebene, welche in der Planimetrie immer nur eine war, ist nun in der Stereometrie zu einer unendlich mannigfaltigen geworden, (im Raume existiren unendlich viele verschiedene Ebenen), und es bedarf, um aus dieser unendlichen Mannigfaltigkeit eine bestimmte Ebene herauszuheben, eines Mittels, ihre Lage festzustellen.

Die Lage einer Linie (in der Ebene oder im Raume) ist durch zwei Punkte gegeben. Zwei Punkte allein aber, da sie nur eine Linie (eine Ausdehnung) bestimmen, können nicht hinreichen, die Lage einer Ebene festzustellen, indem bei dieser noch eine zweite Ausdehnung hinzukommt. Es bedarf hier noch einer zweiten Linie oder eines dritten Punktes, welcher, mit einem der beiden andern Punkte verbunden, eine zweite Linie liefert. — Diese Ueberlegungen führen zu dem folgenden Satze.

§ 1. Grundsatz.

1) Die Lage einer Ebene ist durch drei Punkte gegeben, welche nicht in gerader Linie liegen; d. h. durch jede drei Punkte läßt sich eine Ebene legen, und durch drei Punkte, welche nicht in gerader Linie liegen, kann nur eine einzige Ebene gelegt werden.

§ 2. Zusatz.

Da durch zwei willkührliche Punkte einer Linie*) diese in ihrer ganzen Ausdehnung gegeben ist und umgekehrt mit einer

*) Wenn hier und im Folgenden das Wort „Linie" ohne Beiwort gebraucht wird, so ist in der Regel darunter die gerade Linie zu verstehen.

Linie auch alle ihre Punkte gegeben sind, so folgt hieraus ferner: die Lage einer Ebene ist auch gegeben:

2) durch eine Linie und einen Punkt außerhalb derselben, so wie auch

3) durch zwei sich schneidende Linien; — diese lassen sich nehmlich, indem man zum gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte einen willkührlichen Punkt auf jeder der beiden gegebenen Linien hinzufügt, auf drei Punkte zurückführen.

Dagegen ist es nicht allemal möglich, durch vier Punkte oder durch zwei willkührliche Linien im Raume eine Ebene zu legen, wohl aber durch zwei parallele Linien, da diese immer als in einer Ebene liegend gedacht werden. — Die Lage einer Ebene ist daher auch gegeben:

4) durch zwei parallele Linien.

§ 3. Zusatz.

Aus dem vorherg. § ergiebt sich weiter

1) durch zwei Punkte oder eine Linie allein lassen sich unzählige Ebenen legen; und umgekehrt

2) wenn zwei Ebenen mehrere Punkte gemeinschaftlich haben, so müssen diese alle in einer geraden Linie liegen, — da sich durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte nach § 1 nicht zwei, sondern nur eine einzige Ebene legen läßt.

3) Auf einer Linie lassen sich in einem gegebenen Punkte unzählige Lothe aufrichten, — da durch die Linie unzählige Ebenen gelegt werden können und in jeder derselben auf der gegebenen Linie in dem gegebenen Punkte sich ein Loth errichten läßt. — Dagegen kann

4) auf eine Linie aus einem außerhalb gegebenen Punkte nur ein Loth gefällt werden, — da durch die Linie und den Punkt außer ihr die Lage der Ebene festgestellt ist. Eben so kann

5) durch einen Punkt außerhalb einer Linie mit derselben nur eine einzige Parallele gezogen werden.

Anm. Die §§ 42, 3 und 47, 3 der Planimetrie behalten also auch in der Stereometrie unbedingte Giltigkeit, während § 31 für die Stereometrie nur dann gilt, wenn zugleich die Lage der Ebene gegeben ist, in welcher das Loth errichtet werden soll.

§ 4. **Erklärung.**

Zwei Ebenen können in dreifacher Lage gedacht werden; entweder

1) sie fallen zusammen oder

2) sie schneiden sich und ihr Durchschnitt ist nach § 3, 2 eine gerade Linie — oder

3) sie treffen in keinem Punkte zusammen und werden dann parallel genannt.*)

Statt des Wortes Durchschnittslinie sagt man auch kürzer: Kante.

§ 5. **Erklärung.**

Eben so kann eine (unbegrenzte) gerade Linie in dreifacher Lage gegen eine Ebene gedacht werden: entweder

1) sie liegt ganz in der Ebene, oder

2) sie schneidet dieselbe in einem Punkte, oder

3) sie hat mit der Ebene keinen Punkt gemeinschaftlich und heißt dann der Ebene parallel.

§ 6. **Zusatz.**

Auch zwei Linien im Raume können dreifach gegen einander liegen; entweder

1) sie (liegen in derselben Ebene und) schneiden sich, oder

2) sie (liegen in derselben Ebene und schneiden sich nicht, d. h. sie) laufen parallel, oder

3) sie liegen nicht in derselben Ebene; (sie schneiden sich also nicht und sind auch nicht parallel.)

Erster Abschnitt.

Von Linien in sich schneidenden und parallelen Ebenen.

A. Linien in Ebenen, welche sich schneiden.

Bemerkung. So wie in den Sätzen der Planimetrie über die Lage der Punkte und Linien in einer Ebene nicht zunächst

---

*) Die Möglichkeit paralleler Ebenen werden wir später in § 15 nachweisen.

Punkte mit Punkten oder mit Linien unmittelbar verglichen, sondern allezeit die Punkte unter sich und mit den in Betracht zu ziehenden Linien durch Linien verbunden werden, so schließen wir auch in der Stereometrie fortwährend Punkte und Linien durch Ebenen an einander und an gegebene Ebenen an und beginnen demgemäß mit zwei sich schneidenden Ebenen.

§ 7. Lehrsatz.

1) Wenn zwei Ebenen ABG und ABH (Fig. 1) sich schneiden, und man zieht in der einen Ebene ABG eine Linie CD, welche die Kante AB in irgend einem Punkte D schneidet, so schneidet sie in dem nehmlichen Punkte D auch die andere Ebene ABH; — weil jeder Punkt der Kante beiden Ebenen, also ins Besondere auch der Ebene ABH angehört.

2) Wenn aber eine Linie EF, in der einen von zwei sich schneidenden Ebenen gezogen, der Kante AB parallel ist, so muß sie auch der andern Ebene ABH parallel sein. — Denn wenn die Linie EF die Ebene ABH in irgend einem Punkte träfe, so müßte dieser Punkt beiden Ebenen angehören, also auf der (unbegrenzt gedachten) Kante AB liegen, da diese nach § 3, 2 alle Punkte enthält, welche beiden Ebenen gemeinschaftlich sind; es schnitte also EF die Kante AB, welches gegen die Voraussetzung streitet. Demnach kann EF die Ebene ABH nicht schneiden, sondern muß derselben parallel sein.

§ 8. Zusatz.

1) Eine Linie AB (Fig. 2) ist einer Ebene MN parallel, wenn sie einer in derselben gezogenen Linie CD parallel ist.

Beweis. Denn wenn wir durch die beiden parallelen Linien AB und CD eine Ebene legen, so entstehen zwei sich schneidende Ebenen ABCD und MN, und da zu Folge der Voraussetzung die Linie AB, in der einen gezogen, mit der Kante CD parallel ist, so muß sie auch (nach Nro. 2 des vorherg. §) der andern Ebene MN parallel sein.

2) Wenn eine Linie AB einer Ebene MN (Fig. 2) parallel ist, so ist sie auch mit der Durchschnittslinie CD parallel, in welcher eine durch die Linie AB gelegte Ebene die gegebene Ebene MN durchschneidet.

Beweis. Die beiden Linien AB und CD liegen zu Folge der Voraussetzung in einer Ebene ABCD und können sich auch

nicht schneiden, weil sonst die Linie AB in dem nehmlichen Punkte auch die Ebene MN schneiden würde, welches gegen die Voraussetzung streitet. Folglich ist AB || CD.

Anm. Die Linie AB (Fig. 2), welche parallel mit der Ebene MN vorausgesetzt ist, kann mit keiner in derselben gezogenen Linie zusammentreffen; aber sie ist nur mit denjenigen parallel, mit welchen sie in einer Ebene liegt.

§ 9. Zusatz.

1) Wenn zwei Linien AB und CD (Fig. 3) parallel sind und die eine von ihnen AB einer Ebene MN parallel ist, so ist die andere CD dieser Ebene ebenfalls parallel.

Beweis. Wenn wir durch die Linien AB u. CD eine Ebene legen, so sind zwei Fälle denkbar: entweder 1) diese Ebene trifft mit der gegebenen Ebene MN gar nicht zusammen, — und dann kann auch die Linie CD diese Ebene nicht schneiden und ist folglich derselben parallel; — oder 2) die Ebene ABCD schneidet (gehörig erweitert) die Ebene MN in irgend einer Linie EF. Da AB der Ebene MN parallel vorausgesetzt ist, so muß sie nach dem vorherg. § auch der Durchschnittslinie EF parallel sein, und da ferner CD || AB vorausgesetzt ist und die Linien AB, CD u. EF alle drei in einer Ebene liegen, so muß auch nach der Planimetrie CD || EF und folglich auch CD || MN sein, weil sie einer in dieser Ebene gezogenen Linie EF parallel ist.

2) Wenn daher von zwei parallelen Linien AB und CD die eine AB eine Ebene MN schneidet, so muß die andere CD diese Ebene ebenfalls schneiden; denn wenn CD der Ebene MN parallel wäre, so müßte nach Nr. 1 auch AB mit MN parallel sein, welches der Voraussetzung widerspricht.

Bemerkung. Wir haben uns bisher darauf beschränkt, in der einen von zwei sich schneidenden Ebenen Linien zu ziehen; wenn wir jetzt Linien in beiden Ebenen ziehen und diese Linien mit einander zu vergleichen suchen, so finden wir bald, daß diese Vergleichung wesentlich dadurch bedingt wird, ob die beiden Linien selbst in einer Ebene liegen oder nicht. Wir werden daher zweckmäßiger so fortfahren, daß wir zu den gegebenen Ebenen eine dritte beide durchschneidende Ebene hinzufügen. Wollten wir diese Ebene aber durch die Kante der gegebenen Ebenen legen, so würde keine neue Durchschnittslinie entstehen. Wir nehmen daher besser die dritte Ebene so an, daß sie nicht durch die Kante geht, und gelangen auf diese Art zu drei in drei Kanten sich durch-

schneidenden Ebenen. Vergleichen wir zunächst zwei von diesen Kanten, so zeigt sich uns sogleich, daß wir die beiden Fälle zu unterscheiden haben, welche der folgende § behandelt.

§ 10. Lehrsatz.

Wenn drei Ebenen ABCD, ABEF und CDEF (Fig. 4) sich in drei Kanten AB, CD und EF schneiden, und

1) zwei von diesen Kanten AB und CD sich in irgend einem Punkte G schneiden, so muß auch die dritte Kante EF durch diesen nehmlichen Punkt G gehen.

2) Wenn aber zwei von den Kanten, in welchen drei Ebenen sich schneiden, z. B. AB u. CD (Fig. 5) parallel sind, so sind sie alle drei (AB, CD u. EF) parallel.

Beweis 1) Nach der Voraussetzung gehen die verlängerten Linien AB und CD beide durch den Punkt G; dieser Punkt muß daher so wohl in der erweiterten Ebene ABEF, als auch in der erweiterten Ebene CDEF liegen; und es muß folglich auch die verlängerte Kante EF durch den Punkt B gehen, weil alle Punkte, welche zweien Ebenen gemeinschaftlich sind, in ihrer Durchschnittslinie liegen. — Demnach schneiden sich die Verlängerungen aller drei Kanten AB, CD und EF in dem nehmlichen Punkte G, w. z. b. w.

2) Da AB (Fig. 5) nach der Voraussetzung mit der Linie CD parallel ist, so muß sie auch nach § 8, 1 mit der Ebene CDEF, in welcher diese Linie liegt, parallel laufen; sie muß daher weiter auch zu Folge § 8, 2 mit der Durchschnittslinie EF parallel sein, in welcher die durch AB gelegte Ebene ABEF die Ebene CDEF schneidet. — Eben so läßt sich auch zeigen, daß CD ∥ EF ist.

Anm. Nro. 2 des Vorhergehenden hätte sich auch indirect aus Nro. 1 folgern lassen.

§ 11. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden merkwürdigen Satze, (zu welchem die Planimetrie kein Analogon darbietet,) folgt, daß wenn drei Ebenen in drei Kanten sich schneiden, überhaupt nur zwei Fälle möglich sind: entweder alle drei Kanten vereinigen sich in dem nehmlichen Punkte, oder sie laufen alle drei parallel.

Bemerkung. Durch die beiden vorhergehenden Sätze haben sich uns drei parallele Linien ergeben, welche nicht in derselben Ebene liegen; dieß führt uns weiter zu dem folgenden §.

§ 12. Lehrsatz.

Wenn zwei Linien AB und CD (Fig. 6) einer dritten EF parallel sind, so sind sie auch unter sich parallel.

Beweis. Wenn die gegebenen Linien alle drei in einer Ebene liegen, so ist der Satz bereits in *§ 43 der Planimetrie erwiesen. Wenn sie aber nicht in derselben Ebene liegen, so ist zweierlei zu erweisen: 1) daß AB und CD in einer Ebene liegen, und 2) daß sie sich nicht schneiden.

Um das erstere darzuthun, legen wir zunächst durch die beiden Parallelen AB u. EF eine Ebene, so wie auch durch die Parallelen CD u. EF eine Ebene, und nehmen an, es sei nicht möglich, durch AB und CD eine Ebene zu legen, so wird sich doch jedenfalls durch AB und irgend einen Punkt C in CD eine Ebene legen lassen, welche also nach unserer Annahme die Ebene CDEF nicht in CD, sondern in irgend einer andern Linie CG durchschneidet. Jetzt wären drei Ebenen entstanden, welche sich in den drei Kanten AB, EF u. CG durchschnitten, und da zwei von diesen AB und EF als parallel vorausgesetzt sind, so müßten sie alle drei, also auch CG und EF, parallel sein, welches doch nicht möglich ist, da CD || EF vorausgesetzt ist. Demnach kann die durch AB und C gelegte Ebene die Ebene CDEF nicht in CG, sondern allein in CD durchschneiden, und es liegen folglich die Linien AB und CD in derselben Ebene.

Zweitens können sich auch die Linien AB und CD nicht schneiden, weil sie sonst nach § 10 in dem nehmlichen Punkte auch EF durchschneiden müßten, mit welcher sie doch parallel vorausgesetzt sind. — Demnach sind AB und CD parallel.

Anm. In dem so eben erwiesenen Satze haben wir gesehen, daß § 42, 1 der Planimetrie auch in der Stereometrie unbedingte Gültigkeit hat. Dagegen sind die übrigen Sätze der Planimetrie über parallele Linien (§ 42, 2 — § 47) nur dann auch in der Stereometrie richtig, wenn die in Betracht zu ziehenden Linien sämmtlich in einer Ebene liegen. Nur § 48 gilt ohne diese Beschränkung auch in der Stereometrie, wie der folgende § zeigt.

§ 13. Lehrsatz.

Zwei Winkel (ABC u. DEF, Fig. 7), deren Schenkel parallel laufen (AB || DE und BC || EF) und von den Scheitelpunkten aus nach derselben Seite hin gezogen sind, sind gleich.

Beweis. Wenn die beiden Winkel in derselben Ebene liegen, so ist der Satz schon in der Planimetrie (§ 48) erwiesen;

wenn aber die Winkel ABC u. DEF in verschiedenen Ebenen liegen, so schneide man von ihren parallelen Schenkeln beliebige, aber gleiche Stücke von den Scheitelpunkten aus ab, nehmlich BG = EH und BK = EL, ziehe BE, GH u. KL, ferner GK u. HL; — dann ist BEHG ein Parallelogramm, weil BG $\parallel$ u. = EH ist; folglich ist auch BE $\parallel$ u. = GH. Ferner ist BELK ein Parallelogramm, da BK $\parallel$ u. = EL ist; also ist auch KL $\parallel$ u. = BE. Demnach muß auch GH $\parallel$ u. = KL sein, weil beide $\parallel$ u. = BE erwiesen sind; also ist auch GHLK ein Parallelogramm und daher

$$GK = LH;$$

ferner ist $BG = EH$ | nach der Construction,
und $BK = EL$ |

folglich $\triangle BGK \cong EHL$
und W. $ABC = DEF$, w. z. e. w.

B. Linien in parallelen Ebenen.

§ 14. Lehrsatz.

Wenn zwei parallele Ebenen MN und PQ (Fig. 11) von einer dritten durchschnitten werden, so sind die Durchschnittslinien CD und EF parallel.

Beweis. Die Linien CD und EF liegen erstens nach der Voraussetzung in derselben Ebene und können zweitens auch in keinem Punkte zusammentreffen, weil sonst auch in dem nehmlichen Punkte die Ebenen MN und PQ zusammentreffen würden, die doch als parallel vorausgesetzt sind. Folglich sind die Linien CD und EF parallel.

§ 15. Lehrsatz.

Zwei Ebenen (MN u. PQ, Fig. 8) sind parallel, wenn zwei sich schneidende Linien in der einen (AB u. AC) zweien sich schneidenden Linien in der andern (DE u. DF) parallel laufen.

Beweis. Angenommen es wäre möglich, daß in zwei sich schneidenden Ebenen GHK und GHL (Fig. 9) zwei sich schneidende Linien AB und AC in der einen zweien sich schneidenden Linien DE u. DF in der andern parallel wären, so lege man durch die Parallelen AB und DE eine Ebene und eben so durch die Parallelen AC und DF; dann müßte zunächst AB (u. DE) mit der Durchschnittslinie GH parallel sein nach dem Satze: Wenn drei Ebenen ABGH, DEGH und ABDE sich in drei Linien AB,

DE und GH durchschneiden und zwei von diesen AB und DE parallel (vorausgesetzt) sind, so sind sie alle drei parallel. Aus dem nehmlichen Grunde müßte auch AC (u. DF) mit GH parallel sein. Also gingen durch einen Punkt A zwei Linien AB und AC, welche der nehmlichen dritten Linie GH parallel wären, was nach § 3, 5 nicht möglich ist.

Demnach können in zwei Ebenen, welche sich schneiden, niemals zwei sich schneidende Linien in der einen zweien sich schneidenden Linien in der andern parallel sein, und zwei Ebenen MN und PQ (Fig. 8) müssen folglich gewiß parallel laufen, wenn zwei sich schneidende Linien AB und AC in der einen zweien sich schneidenden Linien DE und DF in der andern parallel sind.

Anm. Wenn man streng wissenschaftlich verfahren will, so muß man § 15 dem § 14 vorangehen lassen; um größerer Anschaulichkeit Willen hat die hier befolgte Anordnung den Vorzug erhalten.

§ 16. Zusatz.

1) Durch einen Punkt außerhalb einer Ebene läßt sich mit derselben nur eine einzige parallele Ebene legen.

Beweis. Angenommen, es gingen durch den Punkt A (Fig. 10) zwei Ebenen PQ u. PR, welche beide mit MN parallel wären; so lege man durch A und einen beliebigen Punkt B in MN eine willkührliche Ebene, welche jedoch nicht durch die Kante PS geht; dann wird dieselbe die Ebenen MN, PQ und PR in drei Linien BC, AD u. AE durchschneiden. Wenn nun die Ebenen PQ u. PR beide mit MN parallel wären, so müßten auch die Durchschnittslinien AD u. AE beide mit BC parallel sein, was doch nicht möglich ist, da durch einen Punkt nicht zwei Linien mit einer dritten parallel gezogen werden können. — Demnach können auch nicht die Ebenen PQ u. PR beide mit MN parallel sein. — Hieraus ergiebt sich weiter:

2) Eine Ebene PR (Fig. 10), welche die eine von zwei parallelen Ebenen, nehmlich PQ, durchschneidet, muß auch die andere MN schneiden.

Beweis. Denn wenn PR die Ebene MN nicht schnitte, sondern mit derselben parallel wäre, so gingen durch den nehmlichen Punkt zwei zu MN parallele Ebenen, welches nach Nro. 1 unmöglich ist.

3) Zwei Ebenen α u. β, welche einer dritten γ parallel sind, müssen auch unter sich parallel sein.

Beweis. Denn wenn α und β in irgend einem Punkte zusammenträfen, so gingen durch diesen Punkt zwei Ebenen, welche einer dritten γ parallel wären, was nach Nr. 1 unmöglich ist.*)

§ 17. Zusatz.

1) Wenn zwei Ebenen MN und PQ (Fig. 11) parallel sind, so ist jede Linie AB, welche der einen Ebene MN parallel ist, auch mit der andern Ebene PQ parallel.

Beweis. Man lege durch AB eine beliebige Ebene, welche die Ebenen MN u. PQ in CD u. EF durchschneidet. Da die Linie AB nach der Voraussetzung der Ebene MN parallel ist, so muß sie auch nach § 8, 2 der Durchschnittslinie CD parallel sein; und da ferner die Ebenen MN u. PQ parallel sind, so sind auch nach § 14 die Durchschnittslinien CD u. EF parallel. Demnach muß auch AB || EF und folglich auch AB mit der Ebene PQ parallel sein, weil sie einer in derselben gezogenen Linie als parallel erwiesen ist. — Es folgt hieraus weiter:

2) Eine Linie BG (Fig. 11), welche die eine von zwei parallelen Ebenen PQ durchschneidet, muß auch die andere MN schneiden.

Beweis. Denn wenn die Linie BG mit der Ebene MN parallel wäre, so müßte sie nach Nr. 1 auch mit der Ebene AB parallel sein, welches gegen die Voraussetzung streitet.**)

3) Parallele Linien AB u. CD (Fig. 12) zwischen parallelen Ebenen MN u. PQ sind gleich.

Beweis. Man lege durch die parallelen Linien AB u. CD eine Ebene, so schneidet diese die beiden parallelen Ebenen MN u. PQ nach § 14 in zwei parallelen Linien AC u. BD; folglich ist ABDC ein Parallelogramm und daher AB = CD.

Anm. Auch folgende Sätze sind leicht zu erweisen:

1) Zwei Ebenen sind parallel, wenn sie von drei parallelen Linien, welche nicht in derselben Ebene liegen, gleiche Stücke abschneiden.

2) Wenn eine Linie und eine Ebene parallel sind, so sind alle zwischen beiden gezogenen parallelen Linien einander gleich.

3) Eine Linie ist einer Ebene parallel, wenn zwei zwischen beiden gezogene parallele Linien einander gleich sind.

---

*) Dasselbe läßt sich auch mit Hülfe von § 14 und 15 leicht direct erweisen.

**) Dasselbe kann auch direct mit Zuziehung von § 42 der Planimetrie erwiesen werden, wie leicht aus dem Anblicke der Figur hervorgeht.

4) Laufen zwei Ebenen parallel, so ist jede in der einen gezogene Linie der andern Ebene parallel.

5) Zwei Ebenen sind parallel, wenn zwei sich schneidende Linien in der einen der andern Ebene parallel sind.

6) Gehen aus einem Punkte mehrere Linien, welche einer Ebene parallel sind, so liegen diese alle in einer Ebene, welche der gegebenen Ebene parallel ist.

7) Schneiden sich zwei Ebenen, so kann durch einen Punkt in der einen nur eine einzige der andern parallele Linie gezogen werden.

8) Ist eine Linie zweien sich schneidenden Ebenen parallel, so ist sie auch der Kante parallel.

9) Wenn zwei sich schneidende Ebenen zweien sich schneidenden Ebenen parallel sind, so sind auch ihre Kanten parallel.

10) Wenn eine Linie und eine Ebene parallel sind, so muß jede Ebene, welche die Linie schneidet, auch die ihr parallele Ebene schneiden.

11) Wenn zwei Linien nicht in derselben Ebene liegen, so läßt sich durch jede eine der andern parallele Ebene legen, und diese beiden Ebenen sind auch unter sich parallel.

§ 17 a. Aufgabe.

Durch einen Punkt außerhalb einer Ebene eine derselben parallele Ebene zu legen.

Die Auflösung folgt leicht aus § 15.*)

Zweiter Abschnitt.

Vom Flächenwinkel.

A. Vom Flächenwinkel im Allgemeinen.

§ 18. Erklärung.

Der unendliche Raum, welcher zwischen zwei Ebenen liegt, die in einer Linie zusammenstoßen, heißt ein Flächenwinkel. Die Ebenen, welche den Flächenwinkel einschließen, heißen die Schenkel, und die Linie, welche sie gemeinschaftlich haben, die Kante oder Scheitellinie des Flächenwinkels.

Ein Flächenwinkel entsteht, wenn man eine Ebene, die an einer Seite durch eine Linie begrenzt gedacht wird, um diese Linie (als Axe) dreht.

---

*) Die Schüler arbeiten die Auflösung in einem besonderen Uebungshefte aus.

Zwei Flächenwinkel werden **gleich** genannt, wenn sie sich so zusammenlegen lassen, daß ihre Scheitellinie und beide Paar Schenkel sich decken, — ungleich, wenn dieses nicht stattfindet. — **Größer.** — **Kleiner.**

Anm. Zur Bezeichnung eines Flächenwinkels sind vier Buchstaben erforderlich, zwei für die Kante und zwei für Punkte in den Schenkeln außerhalb der Kante, (nehmlich für jeden Schenkel einer). Von den letzten beiden Buchstaben wird bei der Benennung des Flächenwinkels der eine an den Anfang, der andere an das Ende gestellt, während die beiden für die Kante in die Mitte kommen; der in Figur 13 vorgestellte Flächenwinkel kann also ABCD oder ACBD oder DBCA oder DCBA genannt werden; in jeder dieser Ausdrucksweisen geben die drei ersten Buchstaben den einen Schenkel, die drei letzten den andern an. — Der Anfänger wird wohl thun, zu beachten, daß die Größe des Flächenwinkels, so wie die des Linienwinkels, von der Größe der verzeichneten Schenkel ganz unabhängig ist.

§ 19. Erklärung.

Ein Flächenwinkel, dessen beide Schenkel in einer Ebene liegen, heißt ein **flacher**, und da, wie man leicht sieht, alle flachen Flächenwinkel gleich sind, so nennt man eben so, wie in der Planimetrie, einen Flächenwinkel **hohl** oder **erhaben**, je nachdem er kleiner oder größer, als ein flacher ist.

Im Folgenden wird fast ausschließlich nur von hohlen Flächenwinkeln die Rede sein.

§ 20. Erklärung.

Zwei (hohle) Flächenwinkel, welche die Kante und einen Schenkel gemeinschaftlich haben, und deren beide andere Schenkel in einer Ebene liegen, heißen **Nebenflächenwinkel**.

Scheitelflächenwinkel sind solche, welche die Kante gemeinschaftlich haben, und deren gegenüberstehende Schenkel in einer Ebene liegen.

§ 21. Zusatz.

1) Die Summe zweier Nebenflächenwinkel ist ein Flacher.

2) Scheitelflächenwinkel sind gleich.

Der **Beweis** ist derselbe wie in der Planimetrie (§ 23 und 25).

§ 22. Erklärung.

Ein Flächenwinkel, der seinem Nebenflächenwinkel gleich ist, heißt ein **rechter**, und zwei Ebenen stehen auf einander **senkrecht**, wenn sie rechte Flächenwinkel bilden.

Da alle rechten Flächenwinkel (als Hälften des Flachen) gleich sind, so kann man eben so, wie in der Planimetrie, diejenigen Flächenwinkel, welche keine rechten sind, schiefe nennen und diese dann wieder in spitze und stumpfe eintheilen.

§ 23. Zusatz.

Von rechten und schiefen Flächenwinkeln gelten aus gleichen Gründen dieselben Bestimmungen, wie von Linienwinkeln in der Planimetrie (§ 29).

§ 24. Erklärung.

Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten durchschnitten werden (Fig. 14), so kann man die entstandenen acht hohlen Flächenwinkel eben so, wie in der Planimetrie (§ 37), in Gegenwinkel, Wechselwinkel und Ergänzungswinkel eintheilen.

Es gelten aber offenbar auch von diesen Flächenwinkeln aus ganz gleichen Gründen dieselben Sätze, wie von den Linienwinkeln in der Planimetrie (§ 38—40).

§ 25. Lehrsatz.*)

Zwei Ebenen sind parallel, wenn sie von einer dritten in zwei parallelen Linien durchschnitten werden, und entweder

1) ein Paar Gegenwinkel oder
2) ein Paar Wechselwinkel gleich sind, oder
3) ein Paar Ergänzungswinkel einen Flachen betragen.

Beweis. Ist (Fig. 14) BC ∥ FG und Flächenwinkel ABCD = AFGH, so ist nach dem vorherg. § Flächenwinkel EBCG = BFGH und DBCG = BFGK; demnach lassen sich die Ebenen DBC, BCFG und FGH in ungeänderter gegenseitiger Lage mit der gegenüberstehenden Verbindung von Ebenen EBCFGK so zusammenlegen, daß Ebene BCFG wieder auf FGBC, nehmlich Kante BC auf FG und FG auf BC, Ebene BCD auf FGK und Ebene FGH auf BCE fällt. Wenn sich nun die Ebenen BCE und FGK in irgend einer Linie schnitten, so müßten sich in der nehmlichen Linie auch die Ebenen FCH und BCD schneiden. Dann schnitten sich aber die ganzen Ebenen EBCD und KFGH in zwei verschiedenen Linien, welches offenbar unmöglich ist. Demnach können sich die Stücke

*) Ehe zu diesem Satze übergegangen wird, sind vorher die Paragraphen *§ 41, *§ 42 und *§ 43 der Planimetrie (S. 18 u. 19) durchzunehmen.

EBC und KFG nicht schneiden; dasselbe gilt eben so von DBC und HFG, und die Ebenen ED und KH sind folglich parallel.

(2) und (3) sind vermöge des vorherg. § unmittelbar Folgerungen aus (1).

§ 26. Lehrsatz.

Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten durchschnitten werden, so sind

1) die Gegenwinkel und
2) die Wechselwinkel gleich, und
3) die Ergänzungswinkel machen zusammen einen Flachen aus.

Beweis. 1) Wenn die Ebene ED ‖ KH (Fig. 14) ist, und es wären die Gegenwinkel ABCD und AFGH ungleich, z. B. ABCD > AFGH, dann würde sich von ABCD ein Stück ABCM = AFGH abschneiden lassen, und es müßte nun nach dem vorherg. § Ebene BCM ‖ KH sein, welches doch (nach § 16) nicht möglich ist, da ED ‖ KH gegeben ist.

(2) und (3) ergeben sich aus (1) durch § 24.

Anm. Eben so wie in der Planimetrie (§ 45—48) lassen sich auch folgende Sätze erweisen:

1) Wenn zwei sich schneidende Ebenen von einer dritten in parallelen Linien durchschnitten werden, so betragen die innern Ergänzungswinkel auf der Seite, auf welcher sich die Ebenen schneiden, zusammen weniger, auf der andern Seite mehr, als einen Flachen.

2) Wenn zwei Ebenen von einer dritten in parallelen Linien geschnitten werden, und ein Paar innere Ergänzungswinkel zusammen weniger, als einen Flachen ausmachen, so schneiden sich die beiden Ebenen und zwar auf der Seite, auf welcher diese Winkel liegen.

3) Flächenwinkel, welche parallele Schenkel haben und sich nach derselben Seite hin öffnen, sind gleich.

4) Ist von zwei parallelen Ebenen die eine auf einer dritten senkrecht, so ist auch die andere auf der dritten senkrecht.

Dagegen läßt sich nicht allemal behaupten, daß zwei Ebenen, welche auf einer dritten senkrecht stehen, parallel sind; dieß ist nur dann ganz gewiß wahr, wenn die senkrechten Ebenen von der dritten in parallelen Linien durchschnitten werden.

Aehnliches gilt von den Behauptungen (3) u. (4) in § 47 der Planimetrie.

Bemerkung. Im Vorhergehenden ist hauptsächlich nur von zwei sich schneidenden Ebenen oder von drei Ebenen, welche sich in parallelen Linien durchschneiden, die Rede gewesen. In den nächsten Sätzen werden drei sich schneidende Ebenen in Betracht

gezogen, deren Kanten sich in demselben Punkte vereinigen, und insofern würden diese Sätze eigentlich in den folgenden Abschnitt gehören. Da dieser indeß die allen körperlichen Dreiecken zukommenden Eigenschaften zu seinem Gegenstande hat, und die nächsten Sätze nur den besondern Fall eines Dreiecks mit zwei rechten Winkeln behandeln, so sind dieselben noch von dem folgenden Abschnitte ausgeschlossen worden.

B. Vom rechten Flächenwinkel in's Besondere.

§ 27. Lehrsatz.

Wenn zwei Ebenen ACD und CEDF (Fig. 15) auf einander senkrecht stehen und eine Linie AB in der einen Ebene gezogen senkrecht auf der Kante CD steht, so ist diese Linie auch auf jeder andern durch ihren Fußpunkt in der andern Ebene gezogenen Linie EF senkrecht.

Beweis. Man denke sich den Flächenwinkel ACDE nochmals verzeichnet und zwar in die Lage A'C'D'E' (Fig. 16) gebracht. Hierauf lege man den Flächenwinkel A'C'D'E' so auf ACDF, daß der Punkt B' auf B, die Kante D'C' auf CD und die Ebene D'C'E' auf CDF fällt. Dann muß zunächst die Ebene A'D'C' auf ACD fallen, weil nach der Voraussetzung die Flächenwinkel ACDF und A'D'C'E' gleich sind, als rechte: ferner fällt die Linie A'B' auf AB, weil die Linienwinkel A'B'C' und ABD nach der Voraussetzung rechte sind, und endlich fällt die Linie B'E' auf BF, weil der Winkel E'B'C' = EBC = FBD ist, als Scheitelwinkel. — Demnach ist Linienwinkel ABF = A'B'E' = ABE, also Linie AB $\perp$ EF.

Das Nehmliche, wie von EF, kann eben so auch von jeder andern durch den Punkt C in der Ebene CEDF gezogenen Linie erwiesen werden.

§ 28. Erklärung.

Eine Linie heißt senkrecht oder ein Loth auf einer Ebene, wenn sie auf allen durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Linien senkrecht steht.

§ 29. Zusatz.

Durch die eben ausgesprochene Erklärung ergiebt sich uns für die Behauptung des § 27 die folgende etwas kürzere Fassung, welche wir hier hinstellen als:

Erster Hauptlehrsatz.

Eine Linie ist auf einer Ebene senkrecht, wenn sie in einer senkrechten Ebene senkrecht auf der Kante steht.

§ 30. Zusatz.

Hieraus folgt weiter:

1) In einem Punkte einer Ebene kann nur ein Loth errichtet werden.

Beweis. Angenommen, es ließen sich im Punkte A auf der Ebene MN (Fig. 17) zwei Lothe AB und AC errichten, so lege man durch dieselben eine Ebene, welche die gegebene Ebene in DE durchschneidet; dann müßten AB u. AC, weil sie beide auf der Ebene MN senkrecht stehen sollen, auch auf der Linie DE senkrecht stehen, welches nach der Planimetrie, da alle drei Linien in der nehmlichen Ebene liegen, unmöglich ist.

2) Aus einem Punkte außerhalb einer Ebene läßt sich auf dieselbe nur ein Loth fällen.

Beweis. Angenommen, es ließen sich aus dem Punkte A (Fig. 18) auf die Ebene MN die beiden Lothe AB und AC fällen, so würde, wenn wir durch diese beiden Linien eine Ebene legen, welche die gegebene Ebene in BC durchschneidet, ein Dreieck ABC mit zwei rechten Winkeln B u. C entstehen, welches nach der Planimetrie unmöglich ist.

3) Gehen aus einem Punkte außerhalb einer Ebene mehrere Linien nach derselben, so ist das Loth unter allen am kleinsten und heißt daher der Abstand des Punktes von der Linie, und die Linien werden um so größer, je weiter sich ihre Fußpunkte vom Fußpunkte des Lothes entfernen.

Der Beweis ist derselbe wie von dem ähnlich lautenden Satze § 79 in der Planimetrie.

Bemerkung. Wir haben oben (§ 30) gesehen, daß zwei sich schneidende Linien auf einer Ebene niemals zugleich senkrecht stehen können. Es reiht sich hieran die Frage, ob zwei Linien parallel sein müssen, wenn sie auf einer Ebene senkrecht stehen. Die Beantwortung dieser Frage, welche in § 30 noch keineswegs enthalten ist, da Linien, welche sich nicht schneiden, deßhalb noch nicht nothwendig parallel sind, liefert der folgende Lehrsatz.

§ 31. Lehrsatz.

1) Wenn von zwei parallelen Linien die eine auf einer

Ebene senkrecht steht, so ist die andere auf dieser Ebene ebenfalls senkrecht.

2) Zwei Linien, welche auf einer Ebene senkrecht stehen, sind parallel.

Beweis. 1) Wenn AB || CD und AB ⊥ MN (Fig. 19) ist, so muß auch CD ⊥ MN sein. Um dieses zu zeigen, ziehe man durch D in MN eine willkührliche Linie DE und durch B mit derselben eine Parallele BF; dann ist W. CDE = ABF, weil ihre Schenkel parallel laufen, und da W. ABF nach der Voraussetzung = 90° ist, so ist folglich auch W. CDE = 90°, also CD ⊥ DE. Dasselbe kann eben so von jeder andern durch den Punkt D in der Ebene MN gezogenen Linie erwiesen werden; folglich ist CD ein Loth auf MN.

2) Wenn AB und CD beide ⊥ MN vorausgesetzt sind, so müssen sie auch parallel sein. Denn angenommen dieses wäre nicht der Fall, so ließe sich doch durch den Punkt D eine andere Linie parallel mit AB ziehen. Diese müßte dann nach Nr. 1 auf der Ebene MN ebenfalls senkrecht stehen, welches nach § 30 unmöglich ist, da CD ⊥ MN vorausgesetzt ist. Demnach müssen die Linien AB und CD parallel sein.

§ 32. Lehrsatz.

1) Durch einen Punkt in einer Linie kann nur eine einzige senkrechte Ebene gelegt werden.

Beweis. Angenommen, es gingen durch den Punkt A in der Linie BC (Fig. 20) zwei Ebenen DEF u. DEG, welche beide auf der Linie BC senkrecht wären, so lege man durch BC eine willkührliche Ebene, welche (nicht gerade durch die Kante DE geht und) die gegebenen Ebenen in zwei Linien AF u. AG durchschneidet; dann müßte BC, da sie nach der Annahme auf den Ebenen DEF u. DEG senkrecht sein soll, auch auf den beiden Linien AF u. AG senkrecht stehen, welches nach der Planimetrie unmöglich ist, da alle drei Linien in einer Ebene liegen.

2) Durch einen Punkt außerhalb einer Linie kann nur eine Ebene gehen, welche auf dieser Linie senkrecht steht.

Beweis. Angenommen, es gingen durch den Punkt A (Fig. 21) zwei Ebenen, welche auf derselben Linie BC in den Punkten D u. E senkrecht ständen; dann würde, wenn wir A mit D u. E verbinden, ein Dreieck ADE entstehen, welches bei D u. E zwei rechte Winkel hätte.

§ 33. Lehrsatz.

1) Wenn von zwei parallelen Ebenen die eine auf einer Linie senkrecht ist, so muß die andere auf dieser Linie ebenfalls senkrecht sein; und umgekehrt:

2) Zwei Ebenen sind parallel, wenn beide auf derselben Linie senkrecht sind.

Beweis. 1) Wenn die Ebene MN ∥ PQ und MN ⊥ AB ist (Fig. 22), so muß auch PQ ⊥ AB sein, d. h. die Linie AB muß mit jeder durch ihren Fußpunkt B in der Ebene PQ willkührlich gezogenen Linie CD rechte Winkel bilden. Um dieses zu zeigen, lege man durch AB und CD eine Ebene, welche die Ebene MN in EF durchschneidet. Da nach der Voraussetzung die Ebenen MN u. PQ parallel sind, so müssen auch die Durchschnittslinien EF u. CD parallel sein, und da ferner AB ⊥ MN vorausgesetzt ist, also AB ⊥ EF ist, so muß nach der Planimetrie AB auch ⊥ CD sein. Dasselbe kann eben so von jeder andern in der Ebene PQ durch den Punkt B gezogenen Linie erwiesen werden. Folglich ist AB ⊥ PQ.

2) Wenn die Ebenen MN und PQ (Fig. 22) beide auf AB senkrecht sind, so müssen sie auch parallel sein. Denn im entgegengesetzten Falle ließe sich durch den Punkt A (nach 17, a) eine andere zu PQ parallele Ebene legen, welche nach Nr. 1 senkrecht auf AB sein müßte. Dieses ist aber nach § 32 nicht möglich, da MN ⊥ AB vorausgesetzt ist. Demnach muß MN ∥ PQ sein.*)

§ 34. Zusatz.

1) Da Linien, welche auf einer Ebene senkrecht stehen, einander parallel und nach § 17, 3 parallele Linien zwischen parallelen Ebenen gleich sind, so folgt hieraus, daß auch Lothe zwischen parallelen Ebenen gleich sind. Man sagt daher: parallele Ebenen stehen überall gleichweit von einander ab.

2) Wenn mehrere Punkte von einer Ebene an derselben Seite gleichen Abstand haben, so liegen dieselben alle in einer Ebene, welche mit der gegebenen Ebene parallel ist.

Der Beweis ist derselbe wie von dem ähnlich lautenden Satze § 105, 3 der Planimetrie.

Anm. Auch dieß ist leicht zu zeigen, daß alle Punkte einer Linie, welche einer Ebene parallel ist, von der Ebene gleichen Abstand haben,

---

*) Auch § 15 liefert einen sehr einfachen Beweis.

und daß eine Linie einer Ebene parallel ist, wenn zwei Punkte derselben von der Ebene gleichen Abstand haben.

Bemerkung. Durch Umkehrung von § 29 ergeben sich die folgenden Paragraphen.

§ 35. Lehrsatz. (Zweiter Hauptlehrsatz.)

Wenn eine Linie AB (Fig. 15) auf einer Ebene CEDF senkrecht steht, so ist auch jede durch diese Linie gelegte Ebene ACD auf der gegebenen Ebene senkrecht.

Beweis. Es soll bewiesen werden, daß der Flächenwinkel ACDE=ACDF ist. Um dieses zu zeigen, denken wir uns den Flächenwinkel ACDE nochmals verzeichnet und zwar in die Lage A'C'D'E' (Fig. 16) gebracht. Hierauf legen wir den Flächenwinkel A'C'D'E' so auf den Flächenwinkel ACDF, daß der Punkt A' auf A, Linie D'C' auf CD und Ebene D'C'E' auf CDF fällt; dann muß auch das Loth A'B' mit dem Lothe AB zusammenfallen, weil nach § 30 sich in einem Punkte einer Ebene nur ein Loth errichten läßt. Nun fällt auch die Ebene A'D'C' mit ACD zusammen, weil zwei sich schneidende Linien in der einen (A'B' und D'C') mit zwei sich schneidenden Linien in der andern (AB und CD) zusammengefallen sind. Demnach ist Flächenwinkel ACDF = A'C'D'E' = ACDE und folglich Ebene ACD $\perp$ CEDF.

§ 36. Zusatz.

Der vorhergehende Lehrsatz läßt sich auch so aussprechen: Eine Ebene CEDF (Fig. 15) ist auf einer andern Ebene ACD senkrecht, wenn sie auf einer in derselben gezogenen Linie AB senkrecht steht.

§ 37. Lehrsatz. (Dritter Hauptlehrsatz.)

Wenn zwei sich schneidende Ebenen ACD u. AEF (Fig. 23) auf einer dritten CEDF senkrecht stehen, so ist auch ihre gemeinschaftliche Kante auf der dritten Ebene senkrecht.

Beweis. Die Linie AB wird auf der Ebene CEDF vermöge § 29 gewiß senkrecht stehen, wenn sie auf einer der beiden Durchschnittslinien CD oder EF senkrecht ist. Angenommen AB sei auf keiner von beiden senkrecht; dann würde sich aus einem beliebigen Punkte der Linie AB, z. B. aus dem Punkte A eine Linie AG senkrecht auf EF und eine Linie AH senkrecht auf CD ziehen lassen. Diese Linien müßten aber, da sie in senkrechten

Ebenen senkrecht auf die zugehörigen Kanten gezogen wären, beide senkrecht auf der Ebene CEDF stehen, welches nach § 30 unmöglich ist. Demnach muß AB auf CD (so wie auch auf EF) senkrecht stehen und folglich nach § 29 ein Loth auf der Ebene CEDF sein, weil sie in einer senkrechten Ebene ACD senkrecht auf der Kante CD steht.

Anm. Auch dieser Satz kann leicht direct in ähnlicher Art, wie § 29 und 35 erwiesen werden. Wenn man nehmlich zunächst um größerer Anschaulichkeit Willen die dort angegebene Construction ausführt und dann Flächenwinkel A'D'C'E' (Fig. 15 u. 16) so auf ACDF legt, daß der Punkt B' auf B, die Linie D'C' auf CD und die Ebene D'C E' auf CDF fällt, so fällt auch Linie B'E' auf BF, weil Winkel FBD = EBC = E'B'C' ist. Ferner fällt auch Ebene AD'C' auf ACD und Ebene A'B'E' auf ABF, weil diese Ebenen nach der Voraussetzung auf D'C'E' und CDF senkrecht stehn. Endlich muß auch die Linie A'B' mit AB zusammenfallen, weil die sich in A'B' schneidenden Ebenen A'B'E' und A'D'C' mit den sich in AB schneidenden Ebenen ABF und ACD zusammengefallen sind. Demnach ist Winkel ABF — A'B'E' = ABE, folglich Linie AB senkrecht auf EF und daher auch senkrecht auf der Ebene CEDF, weil sie in einer senkrechten Ebene AEF senkrecht auf der Kante EF steht.

§ 38. Zusatz.

1) Aus dem so eben geführten Beweise folgt auch noch, daß sich durch eine Linie, welche auf einer Ebene nicht senkrecht steht, — es mag nun die Linie die gegebene Ebene schneiden oder mit derselben parallel sein, — niemals zwei Ebenen legen lassen, welche auf der gegebenen Ebene senkrecht stehn.

2) Der vorherg. Lehrsatz läßt sich auch noch in folgender Art aussprechen: Wenn eine Ebene CEDF (Fig. 23) auf zwei sich schneidenden Ebenen ACD und AEF senkrecht steht, so ist sie auch auf der Kante AB senkrecht.

§ 39. Lehrsatz.

Eine Linie AB (Fig. 24) ist auf einer Ebene CDEF schon dann senkrecht, wenn sie auf zwei durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Linien CD und EF senkrecht steht.

Beweis. Wir brauchen hier nur zu zeigen, daß die Ebene CEDF zu einer der sich schneidenden Ebenen, z. B. zur Ebene ACD senkrecht ist. Angenommen, dieß sei nicht der Fall; so wird sich durch CD eine andere Ebene senkrecht auf die Ebene ACD legen lassen. Diese Ebene schneide die Ebene AEF in der Linie BG. Dann müßte die Linie AB nach § 29, da sie in einer senkrechten

Ebene ACD senkrecht auf der Kante CD vorausgesetzt ist, auch auf der Ebene CDG und also auch auf der Linie BG senkrecht stehn, was jedoch nach der Planimetrie nicht möglich ist, da AB senkrecht auf BF vorausgesetzt ist und alle drei Linien AB, BG und BF in einer Ebene liegen. — Demnach kann die Ebene ACD nicht auf CDG, sondern allein auf CDF senkrecht stehn. Folglich ist auch nach dem schon angeführten § 29 die Linie AB auf der Ebene CEDF senkrecht.

Anm. Auch dieser Satz läßt sich leicht direct mit Benutzung der schon mehr angewendeten Hilfsconstruction erweisen. — Legt man nehmlich Flächenwinkel A'D'C'E' (Fig. 15 u. 16) so auf ACDF, daß die Linie A'B' auf AB und Ebene A'D'C' auf ACD fällt, so muß auch die Ebene A'B'E' auf ABF fallen, weil der Flächenwinkel C'B'A'E' = CBAE = DBAF ist, als Scheitelwinkel. Ferner fällt auch die Linie D'C' auf AD, weil nach der Voraussetzung Winkel A'B'C' = ABD = 90^0 ist, und Linie B'E' auf BF, weil ebenfalls nach der Voraussetzung Winkel A'B'E' = ABF = 90^0 ist. Endlich fällt auch die Ebene D'C'E' auf CDF, weil zwei sich schneidende Linien C'D' und B'E' in der einen mit zwei sich schneidenden Linien CD und BF in der andern zusammengefallen sind. Demnach ist Flächenwinkel ACDF = A'D'C'E' = ADCE, also die Ebene ACD und folglich nach § 29 auch die Linie AB senkrecht auf der Ebene CEDF.

§ 40. Zusatz.

Wenn man in einem Punkte B einer Linie AB (Fig. 25) mehrere Lothe BC, BD und BE errichtet, so liegen diese sämmtlich in einer Ebene, welche auf der gegebenen Linie senkrecht ist.

Beweis. Wenn man durch je zwei Lothe BC u. BD und durch BD u. BE die Ebenen CBD und DBE legt, so müssen diese Ebenen beide nach dem vorherg. § auf AB in dem nehmlichen Punkte B senkrecht stehen und können folglich vermöge § 32 nur eine einzige Ebene bilden. Demnach liegen die drei Lothe BC, BD u. BE in einer Ebene.

§ 41. Aufgabe.

1) Durch einen Punkt in einer Linie und

2) durch einen Punkt außerhalb einer Linie eine Ebene zu legen, welche auf der gegebenen Linie senkrecht ist.

Die Auflösung ergiebt sich sehr leicht aus § 39.

§ 42. Aufgabe.

Durch eine Linie in einer Ebene eine Ebene senkrecht auf die gegebene Ebene zu legen.

Aufl. Man ziehe in der gegebenen Ebene senkrecht auf die

gegebene Linie eine beliebige Linie und construire nach Anleitung des vorherg. § eine Ebene, welche auf dieser Linie im Durchschnittspunkte senkrecht steht, so wird dieses die verlangte Ebene sein.

§ 43. Aufgabe.

Auf einer Ebene in einem gegebenen Punkte ein Loth zu errichten.

Die Auflösung ergiebt sich leicht mit Hülfe des vorherg. § und § 29.

§ 44. Aufgabe.

Auf eine Ebene aus einem außerhalb gegebenen Punkte ein Loth zu fällen.

Die Auflösung folgt aus dem vorherg. § und § 31.

§ 45. Aufgabe.

Durch eine Linie, welche eine Ebene schneidet oder mit derselben parallel ist, eine senkrechte Ebene zu legen.

Die Auflösung folgt leicht aus dem vorherg. § u. § 35.

Wenn die gegebene Linie auf der gegebenen Ebene senkrecht sein sollte, so würde jede durch dieselbe gelegte Ebene auf der gegebenen Ebene senkrecht sein, und die Aufgabe ließe unendlich viele Auflösungen zu. Wenn dieses aber nicht der Fall ist, so hat die Aufgabe vermöge § 38 nur eine Auflösung.

§ 46. Aufgabe.

Es sind zwei beliebige Linien im Raume gegeben, welche nicht in derselben Ebene liegen; man soll den kürzesten Abstand derselben von einander finden.

Aufl. Man lege durch eine der beiden Linien eine der andern parallele Ebene und construire auf diese Ebene durch jede der beiden gegebenen Linien eine senkrechte Ebene; dann ist die Durchschnittslinie dieser beiden senkrechten Ebenen auf beiden gegebenen Linien senkrecht und der kürzeste Abstand derselben von einander.

C. Von dem zum Flächenwinkel gehörigen Linienwinkel.

Bemerkung. Wenn man in einer Ebene CDE (Fig. 26), welche an einer Seite durch eine Linie DE begrenzt gedacht wird, eine Linie BC $\perp$ DE zieht und hierauf sich die Ebene CDE um DE als Axe bis in irgend eine andere Lage ADE herumgedreht

denkt, so erzeugt die Ebene CDE bei dieser Umdrehung den Flächenwinkel ADEC und zugleich beschreibt die Linie BC den Linienwinkel ABC, dessen Ebene zu Folge § 40 auf der Kante DE senkrecht steht. Diese Ueberlegung führt zu den folgenden Sätzen.

§ 47. Erklärung.

Wenn man die Schenkel eines Flächenwinkels ADEC (Fig. 26) mit einer Ebene ABC durchschneidet, welche auf der Kante DE senkrecht steht, so schließen die Durchschnittslinien AB u. BC (an der Seite, an welcher der Flächenwinkel liegt*) einen Linienwinkel ABC ein, welcher der zum Flächenwinkel ADEC gehörige Linienwinkel oder auch der Neigungswinkel der Ebene ADE gegen die Ebene CDE genannt wird.

§ 48. Zusatz.

1) Die Ebene des Linienwinkels ABC (Fig. 26) ist auch auf den Schenkeln des Flächenwinkels ADEC, nehmlich auf den Ebenen ADE und CDE nach § 36 senkrecht, weil sie auf der in beiden Ebenen liegenden Linie DE senkrecht ist; und umgekehrt:

2) Eine Ebene ABC, welche auf den beiden Schenkeln eines Flächenwinkels ADEC senkrecht steht, ist die Ebene des zugehörigen Linienwinkels.

Denn nach § 38 ist eine Ebene ABC, welche auf zwei sich schneidenden Ebenen ADE und CDE senkrecht steht, auch auf der Kante DE senkrecht, also die Ebene des Linienwinkels.

3) Es ist einerlei, durch welchen Punkt der Kante die Ebene des Linienwinkels construirt wird.

Denn die Linienwinkel, welche auf diese Art entstehen, sind nach § 13 alle einander gleich, weil ihre Schenkel parallel laufen.

§ 49. Lehrsatz.

1) Gleiche Flächenwinkel haben gleiche Linienwinkel, und umgekehrt:

2) Zu gleichen Linienwinkeln gehören auch gleiche Flächenwinkel.

---

*) Die Linien AB und AC schließen eben so wohl einen hohlen, als auch einen erhabenen Linienwinkel, und die Ebenen ADE und CDE schließen einen hohlen und einen erhabenen Flächenwinkel ein. Von diesen Linien- und Flächenwinkeln gehört der hohle Linienwinkel zum hohlen Flächenwinkel und der erhabene Linienwinkel zum erhabenen Flächenwinkel.

3) Flächenwinkel verhalten sich wie die zugehörigen Linienwinkel.

Beweis. 1) Es sei Flächenwinkel ADEC = FKLH (Fig. 26). — Man lege die Flächenwinkel so zusammen, daß sie sich decken, nehmlich so, daß Punkt B auf G, Kante DE auf KL, Schenkel (Ebene) CDE auf HKL und Schenkel ADE auf FKL fällt. Dann fällt auch AB auf FG und BC auf GH, weil diese Linien mit den Kanten DE und KL rechte Winkel bilden, und die Ebenen, in denen sie liegen, zusammengefallen sind; demnach ist Linienwinkel ABC = FGH.

2) Es sei Linienwinkel ABC = FGH (Fig. 26). — Man lege die Flächenwinkel so zusammen, daß sich die gleichen Linienwinkel decken, nehmlich Punkt B auf G, Schenkel AB auf FG und Schenkel BC auf GH fällt. Dann fällt auch Kante DE auf KL, weil sie auf den Ebenen der Linienwinkel, die man so eben zusammengelegt hat, senkrecht stehen; nun ist auch Ebene ADE mit FKL und CDE mit HKL zusammengefallen; folglich ist der Flächenwinkel ADEC = FKLH.

3) Man bestimme zuerst das Verhältniß der Linienwinkel; — angenommen es verhalte sich (Fig. 27) Linienwinkel ABC : FGH = 3 : 2, so giebt es einen dritten Winkel, welcher in ABC dreimal und in FGH zweimal enthalten ist. Diesen Winkel trage man auf ABC dreimal und auf FGH zweimal auf und lege durch die Kanten und durch die Theilungslinien Ebenen, so theilen diese den Flächenwinkel ADEC in drei und FKLH in zwei gleiche Theile; und es verhält sich folglich Flächenwinkel ADEC : FKLH = 3 : 2. Da nun auch nach der Annahme Linienwinkel ABC : FGH = 3 : 2 war, so verhalten sich folglich die Flächenwinkel gerade wie die zugehörigen Linienwinkel.

Anm. Will man dem vorstehenden Beweise dadurch das Ansehen größerer Allgemeinheit geben, daß man statt der bestimmten Zahlen 3 und 2 unbestimmte Zeichen m und n setzt, so wird man doch im Uebrigen den obigen Beweis buchstäblich beibehalten können. — Außerdem wird man auch noch bald die Uebereinstimmung des obigen Beweises mit den Beweisen der §§ 181, 205 u. 222 in der Planimetrie bemerkt haben und eben so ohne Schwierigkeit im Stande sein, das in der Anm. zu § 181 über die Vergleichung irrationaler Verhältnisse Gesagte auf den vorliegenden Fall zu übertragen.

§ 50. Zusatz.

1) Zum flachen und zum rechten Flächenwinkel gehören auch

ein flacher und ein rechter Linienwinkel; dasselbe gilt auch von den Ausdrücken: hohl, erhaben, spitz, stumpf.

2) Nennt man den 180sten Theil eines flachen Flächenwinkels einen **Grad**, den 60sten Theil eines Grades eine **Minute** u. s. f., so hat vermöge (3) im vorherg. § der Flächenwinkel allemal eben so viel Grade, Minuten u. s. w., als der zugehörige Linienwinkel.

Bemerkung. Es folgt aber hieraus, daß in der Rechnung, in welcher niemals die Größen selbst, sondern nur ihre Maaßzahlen in Anwendung kommen, sich die Flächenwinkel allemal mit ihren zugehörigen Linienwinkeln vertauschen lassen.

*§ 51, a. Lehrsatz.

1) Der zu einem Flächenwinkel ABCD (Fig. 28) gehörige Linienwinkel wird auch richtig erhalten, wenn man aus einem beliebigen Punkte A in dem einen Schenkel ein Loth AD auf den andern Schenkel und aus demselben Punkte A ein Loth AE auf die Kante BD zieht und durch beide Lothe eine Ebene legt; der so entstandene Linienwinkel AED ist der zum Flächenwinkel ABCD gehörige Linienwinkel.

Beweis. Denn wenn man in der erweiterten Ebene AED die Linie EF || AD zieht, so ist EF senkrecht auf der Ebene BCD, weil AD senkrecht auf dieser Ebene construirt ist. Demnach ist W. FEC = 90°. Ferner ist auch W. AEC = 90° nach der Construction; folglich ist die Linie CE ⊥ EF und EA und also auch senkrecht auf der Ebene FED. Daher ist die Ebene FED die Ebene des Linienwinkels, weil sie senkrecht auf der Kante BC steht.

2) Der zum Flächenwinkel ABCD gehörige Linienwinkel wird ferner richtig erhalten, wenn man aus einem Punkte A in dem einen Schenkel ein Loth AD auf den andern Schenkel und aus dem Fußpunkte D ein Loth DE auf die Kante BC zieht und durch diese beiden Lothe eine Ebene legt. Der so entstandene Linienwinkel AED ist der zum Flächenwinkel ABCD gehörige Linienwinkel.

Beweis. Denn wenn man wieder EF || AD zieht, so ist, aus gleichen Gründen wie in Nro. 1 W. CEF = 90°, und da auch W. CED = 90° nach der Construction ist, so ist wieder CE senkrecht auf der Ebene FED und folglich Linienwinkel AED der zum Flächenwinkel ABCD gehörige Linienwinkel.

*§ 51, b. Zusatz.

Wenn zwei Ebenen ABC und BCD (Fig. 28) mit einander schiefe Flächenwinkel bilden und man fällt aus einem Punkte A in der einen Ebene ein Loth AD auf die andere Ebene, so fällt dieses allemal auf die Seite des spitzen Flächenwinkels.

Beweis. Denn wenn man aus A eine Linie AE ⊥ BC zieht und durch AD und AE eine Ebene legt, so ist nach Nr. 1 des vorherg. § Linienwinkel AED der zum Flächenwinkel ABCD gehörige Linienwinkel, und da Linienwinkel AED ein spitzer ist, weil er in dem rechtwinkligen Dreiecke AED an der Hypotenuse liegt, so ist folglich auch der Flächenwinkel ABCD ein spitzer.

D. Von Projectionen.

§ 52. Erklärung.

Liegt ein Punkt außerhalb einer Ebene, und man zieht aus dem Punkte ein Loth auf die Ebene, so heißt der Fußpunkt des Lothes die Projection des gegebenen Punktes auf die gegebene Ebene. Diese Ebene wird auch die Projections- oder Grundebene und das Loth die projicirende Linie genannt.

Denkt man sich sämmtliche Punkte einer beliebigen (geraden oder krummen, begrenzten oder unbegrenzten) Linie auf die Grundebene projicirt, so wird durch die Projectionen derselben (im Allgemeinen) wieder eine zusammenhängende Linie bestimmt, welche die Projection der gegebenen Linie heißt. Die ebene oder krumme Fläche, in welcher sämmtliche projicirende Linien liegen, heißt die projicirende Ebene oder Fläche.*)

Projicirt man ferner alle Grenzen einer geradlinigen oder krummlinigen Figur auf die Grundebene, so schließen die Projectionen dieser Grenzen (im Allgemeinen) ebenfalls eine Figur ein, welche die Projection der gegebenen Figur genannt wird.

Die Linie, in welcher eine ebene oder krumme Fläche die Grundebene schneidet, heißt Grundschnitt.

§ 53. Zusatz.

1) Als Projection eines Punktes in der Grundebene ist die-

*) Dergleichen krumme Flächen nennt man auch Cylinderflächen (im weitern Sinne).

ser Punkt selbst anzusehen. — Aehnliches gilt von einer Linie oder Figur in der Grundebene.

2) Steht eine gerade Linie auf der Grundebene senkrecht, so ist ihre Projection ein Punkt, nehmlich der Durchschnittspunkt der Linie mit der Grundebene. — Ist aber die gerade Linie nicht senkrecht auf der Grundebene, so ist ihre Projection jedenfalls eine gerade Linie, und die projicirende Fläche ist eine Ebene, welche auf der Grundebene senkrecht steht.

3) Die Projection einer krummen Linie ist im Allgemeinen wieder eine krumme Linie; sie wird eine gerade Linie, wenn die gegebene krumme Linie ganz in einer auf der Grundebene senkrechten Ebene liegt.

Beweis zu (2). Die projicirenden Linien der einzelnen Punkte der Linie AB (Fig. 29) sind parallel und liegen daher sämmtlich in der durch AB und eine von ihnen gelegten Ebene. Die Projectionsfläche ist folglich eine Ebene, die nach § 35 auf der Grundebene senkrecht steht, und die Projectionen der einzelnen Punkte liegen im Durchschnitte ab dieser Ebene mit der Grundebene, also in einer geraden Linie.

§ 54. Zusatz.

1) Laufen zwei Linien, (die nicht senkrecht auf der Grundebene stehen,) parallel, so sind auch ihre projicirenden Ebenen, und folglich auch ihre Projectionen parallel.

2) Schneiden sich zwei Linien, so treffen auch ihre Projectionen in einem Punkte zusammen, welcher die Projection des Durchschnittspunktes der gegebenen Linien ist.

Beweis. 1) Die gegebenen Parallelen seien AB und CD (Fig. 29), ihre Projectionen ab und cd. Man wähle in jeder der gegebenen Linien einen beliebigen Punkt E und F und ziehe die projicirenden Linien Ee und Ff, welche als Lothe auf der Grundebene parallel sind. Da nun aber nach der Voraussetzung auch AB und CD parallel sind, so ist folglich (nach § 15) Ebene ABba || CDdc und daher auch die Durchschnittslinie oder Projection ab || cd (§ 14).

2) Wenn sich die gegebenen Linien AB und CD (Fig. 30) im Punkte E durchschneiden, so schneiden sich die projicirenden Ebenen in einer Linie Ee, welche als Durchschnittslinie zweier senkrechten Ebenen (nach §. 37) ein Loth auf der Grundebene ist; demnach ist der Durchschnittspunkt e der beiden Projectionen ab

und cd die Projection des Durchschnittspunktes E der gegebenen Linien AB und CD.

§ 55. Erklärung.

Der Winkel, welchen eine schiefe Linie mit ihrer Projection auf eine gegebene Ebene (Grundebene) bildet, heißt der Neigungswinkel der Linie gegen die Ebene.

§ 56. Zusatz.

1) Der Neigungswinkel ist der kleinste, welchen eine schiefe Linie mit Linien durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogen bildet.

2) Parallele Linien sind gegen eine schneidende Ebene gleich geneigt, und eben so ist

3) eine Linie gegen zwei schneidende parallele Ebenen gleich geneigt.

Beweis. 1) Die schiefe Linie sei AB (Fig. 31), ihre Projection BC, und BD irgend eine andere in der Grundebene durch B gezogene Linie. — Aus einem beliebigen Punkte E in AB fälle man auf BC das Loth EF, welches (nach § 29) auch senkrecht auf der Grundebene stehen muß, da es in einer senkrechten Ebene senkrecht auf die Kante gezogen ist; ferner mache man BG = BF und ziehe EG. Dann ist in den Dreiecken EBF und EBG Seite EB = EB, BF = BG, aber (nach § 30, 3) die dritte Seite EF < EH, daher muß auch (nach § 72 der Planimetrie) der gegenüberliegende Winkel EBF < EBG sein.

2) Sind die Linien AB und CD (Fig. 32) parallel, so sind auch ihre Projectionen BE und DF (nach § 54, 2) parallel und daher (nach § 13) die Neigungswinkel ABE und CDF einander gleich.

3) Wird durch die schiefe Linie AB (Fig. 33) eine auf MN senkrechte Ebene gelegt, so muß diese Ebene auch auf der parallelen Ebene PQ (nach § 26) senkrecht stehen; demnach sind ABD und ACE die Neigungswinkel der schiefen Linie gegen die parallelen Ebenen MN und PQ, und diese Winkel sind gleich, da (nach § 14) BD || CE ist.

Anm. Auch folgende Sätze sind nicht schwer zu erweisen:

1) Wenn eine Linie gegen eine Ebene schief geneigt ist, und durch ihren Fußpunkt in der Ebene zwei Linien gezogen sind, welche von der Projection zu beiden Seiten um gleiche Winkel abweichen, so bilden diese Linien auch mit der schiefen Linie gleiche Winkel.

2) Wenn dagegen eine Linie in der Ebene durch den Fußpunkt der schiefen Linie gezogen von der Projection um einen größern Winkel, als eine andere (auf derselben Seite oder auf entgegengesetzter Seite) abweicht, so bildet sie auch mit der schiefen Linie einen größern Winkel, als die andere.

3) Eine schiefe Linie kann daher nie mit drei durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Linien gleiche Winkel bilden. — Dieß gilt also allein von der senkrechten Linie.

4) Zwei schiefe Linien sind parallel, wenn ihre Projectionen parallel laufen, und wenn sie mit diesen nach derselben Seite hin gleiche Winkel bilden.

5) Zwei Ebenen sind parallel, wenn die Projectionen einer schiefen Linie auf die beiden Ebenen parallel laufen. — (Dagegen sind zwei Ebenen nicht nothwendig parallel, wenn auch gegen beide eine schiefe Linie gleich geneigt ist.)

*§ 57. Erklärung.

Wenn eine schiefe Ebene GHBC (Fig. 28) die Grundebene schneidet, und man denkt sich die schiefe Ebene durch eine mit dem Grundschnitte BC parallele Linie GH begrenzt, so heißt der senkrechte Abschnitt AE der parallelen Grenzlinie vom Grundschnitte die Länge, der senkrechte Abstand AD dieser Linie (GH) von der Grundebene die Höhe und die Projection ED der Länge AE auf die Grundebene die Grundlinie oder Basis der schiefen Ebene.

*§ 58. Zusatz.

Man sieht hieraus, daß die Länge einer schiefen Ebene eine durchaus willkührliche Größe ist, indem man als solche jede beliebige in derselben auf die Kante senkrecht gezogene Linie annehmen kann. Ist aber die Länge einer gegebenen Ebene einmal festgestellt, so ist hierdurch auch ihre Höhe und Basis bestimmt. Eben so ist leicht zu sehen, daß bei derselben Ebene, wie man auch immer ihre Länge annehmen mag, doch zwischen Länge, Basis und Höhe stets dieselben Verhältnisse stattfinden. — Dasselbe gilt von zwei Ebenen, welche mit der Grundebene gleiche Winkel bilden.

Anm. Der mit der Trigonometrie bekannte Leser weiß, daß insbesondere das Verhältniß der Höhe zur Länge der Sinus und das Verhältniß der Basis zur Länge der Cosinus des spitzen Winkels genannt wird, unter welchem die schiefe Ebene die Grundebene schneidet.

*§ 59. Lehrsatz.

Wenn in einer schiefen Ebene ein Dreieck gezeichnet ist, und

man projicirt dasselbe auf die Grundebene, so verhält sich der Inhalt des gegebenen Dreiecks zum Inhalt seiner Projection, wie die Länge der schiefen Ebene zu ihrer Basis.

Beweis. 1) Es sei zuerst eine Seite AB (Fig. 34) des gegebenen Dreiecks ABC mit dem Grundschnitte DE der schiefen Ebene parallel; dann ist auch die entsprechende Seite ab der Projection abc mit DE und AB parallel*), und da ferner das Loth Aa ∥ Bb ist, so ist das Viereck ABba ein Parallelogramm und daher auch AB = ab.

Zieht man nun aus C in der schiefen Ebene eine Linie CF senkrecht auf die Linie AB und also auch senkrecht auf die ihr parallele Kante DE und legt durch dieses Loth und das Loth Cc, welches aus demselben Punkte C auf die Grundebene gefällt ist, eine Ebene CFc, so ist diese Ebene (nach § 51, 1) senkrecht auf der Kante ED. Demnach ist DE senkrecht auf der in der Ebene CFc liegenden Linie Fc und daher auch die mit DE parallele ab ⊥ Fc. Nimmt man also die Seiten AB und ab als Grundlinien der Dreiecke ABC und abc an, so sind CG und cg ihre Höhen. Da nun die Grundlinie AB und ab oben als gleich erwiesen sind, so verhalten sich die Dreiecke wie ihre Höhen, und es ist folglich

$$\triangle ABC : abc = CG : cg.$$

Weiter sind aber Cc und Gg als Lothe auf der Grundebene parallel; daher verhält sich $CG : cg = FG : fg$,

also auch $$\triangle ABC : abc = FG : fg.$$

Denkt man sich nun die schiefe Ebene durch die zur Kante DE parallele AB begrenzt, so ist FG ihre Länge und Fg die zugehörige Basis. Also verhält sich das Dreieck ABC in der schiefen Ebene zu seiner Projection abc, wie die Länge der schiefen Ebene Fg zur zugehörigen Basis FG.

2) Ist keine Seite des Dreiecks ABC (Fig. 35) mit dem Grundschnitte DE parallel, so läßt sich dasselbe durch eine Linie AM aus einer Ecke A mit dem Grundschnitt DE parallel gezogen in zwei Dreiecke AMB und AMC zerschneiden, und wenn am die Projection von AM ist, so sind offenbar die Dreiecke abm und acm die Projectionen der Dreiecke ABM und ACM. Da aber die Seite

---

*) Denn wenn drei Ebenen — die Grundebene DEc, die schiefe Ebene DEC und die projicirende Ebene ABba — sich in drei Linien DE, AB und ab durchschneiden und zwei von diesen Linien AB und DE (nach der Vorauss.) parallel laufen, so sind sie (nach § 10, 2) alle drei parallel.

AM mit dem Grundschnitte parallel ist, so verhält sich nach (1), wenn man der Kürze wegen die willkührliche Länge der schiefen Ebene mit l und die zugehörige Basis mit b bezeichnet:

$$\triangle \text{AMB}:\text{amb} = l:b.$$

(Denn der vorhergehende Beweis gilt offenbar auch dann, wenn die Spitze B des zu projicirenden Dreiecks AMB zwischen dem Grundschnitte DE der schiefen Ebene und der parallelen Seite AM liegt.) Eben so ist auch

$$\triangle \text{AMC}:\text{amc} = l:b = \triangle \text{AMB}:\text{amb},$$

folglich auch

$$\triangle \text{AMB}+\text{AMC}:\text{amb}+\text{amc} = l:b,$$

d. h. $\triangle \text{ABC}:\text{abc} = l:b$, w. z. e. w.

Anm. Sollte die Parallele AM die Seite BC nicht selbst, sondern ihre Verlängerung schneiden, so würde man, statt die Dreiecke zu addiren, dieselben subtrahiren. Man kann aber auch die Ecke A allemal so wählen, daß die hindurch gezogene Parallele die gegenüberstehende Seite schneidet.

*§ 60. Lehrsatz.

Der Inhalt einer jeden geradlinigen oder krummlinigen Figur in einer schiefen Ebene verhält sich zu ihrer Projection wie die Länge der schiefen Ebene zu ihrer Basis.

Beweis. Denn die geradlinige Figur läßt sich in Dreiecke zerschneiden, die zu ihren Projectionen in dem angegebenen Verhältnisse stehen. Die Projectionen der einzelnen Dreiecke bilden aber zusammen die Projection der ganzen gegebenen Figur, und wenn alle Theile der einen zu den Theilen der andern das nehmliche Verhältniß haben, so müssen sich offenbar auch auf gleiche Weise die ganzen Figuren verhalten (§ 180, 13 der Planimetrie).

Der Inhalt einer krummlinigen Figur kann nicht anders gefunden werden, als indem man sich dieselbe als ein Polygon von unendlich vielen Seiten denkt. Da nun der Satz von geradlinigen Figuren gilt, so muß er auch für krummlinige richtig sein.

Bemerkung. Man hat in den vorhergehenden Sätzen angenommen, daß die schiefe Ebene und die in derselben gezeichnete Figur ganz auf derselben Seite des Grundschnitts liegen. Man begreift aber auf der Stelle, daß jene Sätze richtig bleiben, wenn eine Seite der Figur in den Grundschnitt fällt; und dasselbe gilt auch dann noch, wenn die zu projicirende Figur von dem Grundschnitte in zwei Theile zerschnitten wird. Denn da diese beiden Theile sich zu ihren Projectionen, welche zusammen die Projection

der gegebenen Figur bilden, wie die Länge zur Basis verhalten, so muß dasselbe offenbar auch von den ganzen Figuren gelten (§ 180, 13 der Planimetrie).

Anm. 1) Ist der Inhalt einer beliebigen ebenen Figur J, der Inhalt ihrer Projection i und der spitze Winkel, unter welchem die schiefe Ebene die Grundebene schneidet, α, so ist

$$i = J\cos\alpha.$$

Weiter mögen für die mit der Trigonometrie bekannten Leser noch folgende Sätze hier eine Stelle erhalten:

2) Wenn drei Ebenen auf einander senkrecht stehen (je zwei auf der dritten), und eine Linie bildet mit den Kanten (AX, AY, AZ in Fig. 36) die Winkel α, β, γ, so ist allemal

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1.$$

Denn projicirt man einen beliebigen Punkt B der gegebenen Linie AB = a auf die gegebenen Ebenen und bezeichnet die projicirenden Linien mit x, y, z, so ist

$$\begin{aligned} a^2 &= u^2+z^2 \\ &= x^2+y^2+z^2 \\ &= a^2\cos\alpha^2+a^2\cos\beta^2+a^2\cos\gamma^2, \\ \text{also}\quad 1 &= \cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2. \end{aligned}$$

3) Wenn man eine ebene Figur auf drei Ebenen projicirt, von denen immer je zwei auf der dritten senkrecht stehen, so ist das Quadrat des Inhalts der gegebenen Figur gleich der Summe der Quadrate der Inhalte der drei Projectionen; also wenn J den Inhalt der gegebenen Figur i_1, i_2, i_3 die Inhalte der drei Projectionen bezeichnen:

$$J^2 = i_1{}^2+i_2{}^2+i_3{}^2.$$

Denn wenn man aus A (Fig. 37) auf die Ebene XYZ der zu projicirenden Figur ein Loth AB fällt, so bildet dieses offenbar mit den drei Kanten dieselben Winkel, wie die Ebene der Figur mit den drei gegenen Ebenen; (so ist z. B. im rechtwinkligen △ ZAC W. BAZ = BCA); sind also diese Winkel, wie vorhin α, β, γ, so ist nach (1)

$$i_1 = J\cos\gamma,\quad i_2 = J\cos\beta,\quad i_3 = J\cos\alpha,$$

also $$i_1{}^2+i_2{}^2+i_3{}^2 = J^2(\cos\gamma^2+\cos\beta^2+\cos\alpha^2),$$

oder da $\cos\gamma^2 + \cos\beta^2 + \cos\alpha^2 = 1$ ist:

$$i_1{}^2+i_2{}^2+i_3{}^2 = J^2.$$

*§ 61. Zusatz.

Die Lage eines Punktes im Raume oder die Lage und Größe einer Linie ist offenbar durch die Projection auf eine Ebene nicht völlig bestimmt. Man nimmt zu dieser Bestimmung am einfachsten zwei sich senkrecht durchschneidende Projectionsebenen an. — Daß aber durch die Projectionen auf diese Ebenen ein Punkt oder eine Linie völlig bestimmt ist, fällt bald in die Augen; denn der fragliche Punkt liegt offenbar im Durchschnitt der beiden projiciren-

den Linien und die gerade oder krumme Linie, deren beide Projectionen gegeben sind, ist der Durchschnitt der beiden projicirenden ebenen oder krummen Flächen. — Außerdem ist klar, daß die oben erwiesenen Sätze über die Projectionen auf eine Ebene eben so auch von den Projectionen auf die andere Ebene gelten.

Anm. 1. Eine weitere Ausführung dieser und verwandter, in praktischer Hinsicht nicht unwichtigen, Lehren hat des beschränkten Raumes wegen hier keine Stelle erhalten können. Dagegen mögen einige unmittelbare Anwendungen der vorhergehenden Sätze noch kurz erwähnt werden.

Man bedient sich der bisher betrachteten Projection zur Abbildung von Theilen der Erdoberfläche und nennt dieselbe zum Unterschiede von andern Projectionsarten die orthographische Projection. Stellt man nach derselben die nördliche oder südliche Halbkugel dar und nimmt als Projectionsebene den Aequator an, so werden die Projectionen der Parallelkreise ihnen gleiche Kreise und die Projectionen der Meridiane gerade Linien, die sich alle in der Mitte, der Projection des Poles, vereinigen. — Bei der Abbildung der westlichen oder östlichen Halbkugel nimmt man den ersten Meridian als Projectionsebene an und erhält dann statt des Aequators und der Parallelkreise parallele gerade Linien; der erste Meridian bleibt ein Kreis ohne alle Aenderung, die übrigen Meridiane geben Ellipsen, und der mittelste, — der auf dem ersten senkrecht steht, — wird in einer geraden Linie abgebildet.

Da bei dieser Projection die nahe am Umfange liegenden Theile in der auf den Umfang senkrechten Richtung allzu stark verkürzt und daher die Abbildungen derselben den wirklich stattfindenden Verhältnissen sehr unähnlich werden, so wendet man bei den Planiglobien unserer Landcharten gewöhnlich eine andere, die stereographische Projection an. — Bei dieser denkt man sich — in ähnlicher Art, wie beim perspectivischen Zeichnen — das Auge in einen Punkt der Kugeloberfläche, welcher der Mitte des abzubildenden Landes gerade gegenüberliegt, von dieser Mitte nach dem Auge eine Linie gezogen und senkrecht auf dieselbe durch den Mittelpunkt der Kugel die Projectionsebene gelegt. Verbindet man nun den Ort des Auges mit einem der auf die Zeichnung überzutragenden Punkte, so ist der Einschnitt der Verbindungslinie in die Projectionsebene die gesuchte Projection. — Für die nördliche Halbkugel ist der Aequator die Projectionsebene und der Südpol der Ort des Auges (Polarprojection); die Projectionen der Parallelkreise sind Kreise, die aber sämmtlich kleiner ausfallen, als die Kreise selbst auf der Kugel; die Meridiane liefern gerade Linien, die sich in der Mitte vereinigen. — Bei der Abbildung der östlichen oder westlichen Halbkugel ist der erste Meridian die Projectionsebene und die Stelle des Auges ein Punkt des Aequators (Aequatorealprojection), der vom ersten Meridiane um 90^0 absteht. Die Projectionen der Meridiane und der Parallelkreise sind Kreisbogen; nur statt des Aequators und des mittelsten Meridianes erhält man zwei sich senkrecht schneidende Linien.

Für den Seefahrer ist es von besonderer Wichtigkeit, daß diejenige krumme Linie, welche alle Meridiane unter demselben Winkel schneidet, — die loxodromische Curve, — in der Zeichnung als gerade Linie dargestellt werde. Um dieses zu erreichen, müssen zunächst die Meridiane selbst als parallele gerade Linien aufgezeichnet werden, so daß also die Längengrade, die in der Wirklichkeit gegen den Pol hin abnehmen, durchgehends eine gleiche Größe erhalten. Um aber dennoch das Verhältniß, welches in den einzelnen Gegenden zwischen Längen- und Breitengraden stattfindet, richtig darzustellen, vergrößert man die Breitengrade in der Zeichnung eben so vielmal, als in der Wirklichkeit die Längengrade abnehmen. Nach dieser Projection, die zuerst Mercator angewandt hat, werden gewöhnlich Seecharten entworfen. — Länder ganz in der Nähe des Poles lassen sich nach derselben gar nicht darstellen.

Anm. 2. In der Zeichenkunst wird verlangt, daß das Bild möglichst denselben Eindruck im Auge hervorbringe, wie der Gegenstand selbst, Die Wissenschaft, welche die Gesetze entwickelt, deren Beobachtung für diesen Zweck erforderlich sind, heißt Perspective, und zwar Linear- oder geometrische Perspective, insofern nur die verschiedene Lage der abzubildenden Theile eines Gegenstandes in Betracht gezogen wird, zum Unterschiede von der Luftperspective, welche sich mit dem Tone der Farben beschäftigt. — Hier wird allein von der geometrischen Perspective die Rede sein. — Um das Bild eines Gegenstandes auf einer gegebenen Ebene — Tafel — zu erhalten, denkt man sich nach allen Punkten desselben von einem Punkte — dem Auge — aus gerade Linien gezogen; die Einschnittspunkte dieser Linien in die Tafel sind die gesuchten Bilder.*) Von diesen gelten folgende Gesetze:

1) Das Bild eines Punktes ist wieder ein Punkt. — Sollte die Linie, vom Auge nach dem gegebenen Punkte gezogen, der Ebene der Tafel parallel laufen, so würde es gar nicht möglich sein, diesen Punkt auf der Tafel abzubilden.

2) Das Bild einer geraden Linie ist wieder eine gerade Linie, nehmlich der Einschnitt, der durch das Auge und die gegebene Linie gelegten Ebene in die Ebene der Tafel. Wären diese beiden Ebenen parallel, so würde sich die gegebene Linie auf der Tafel gar nicht abbilden lassen. — Geht die Linie durch das Auge, so ist ihr Bild ein Punkt, nehmlich ihr Einschnitt in die Ebene der Tafel.

*) Die abzubildenden Punkte können eben so wohl mit dem Auge auf der nehmlichen Seite der Tafel, als auf der entgegengesetzten Seite liegen. In der Zeichenkunst wird die Tafel zwischen dem Auge und dem Gegenstande gedacht. Bei dem Schatten dagegen, welchen ein leuchtender Punkt in endlicher Entfernung von einem Gegenstande auf einer Ebene — Tafel — erzeugt, befinden sich der leuchtende Punkt und der Gegenstand auf derselben Seite der Tafel.

3) Das Bild einer krummen Linie ist wieder eine krumme Linie; es wird eine gerade Linie, wenn die krumme Linie ganz in einer durch das Auge gehenden Ebene liegt.

4) Wenn zwei Linien AB und CD (Fig. 38), — die nicht mit dem Auge O in einer Ebene liegen, — unter sich und mit der Ebene der Tafel parallel laufen, so sind auch ihre Bilder ab und cd parallel. — Denn die durch O und AB und CD gelegten Ebenen schneiden sich in einer Linie PQ, welche nach § 10, 2, — wenn man sich durch die Parallelen AB und CD eine Ebene gelegt denkt, — mit AB und CD und folglich auch mit der Ebene der Tafel parallel ist; demnach müssen auch vermöge § 10 die Linien ab und cd, in denen jene Ebenen die Ebene der Tafel schneiden, mit PQ und folglich auch unter sich parallel sein.

Wenn dagegen die Linien AB und CD (Fig. 38) zwar unter sich, aber nicht mit der Ebene der Tafel parallel sind, so laufen ihre Bilder auf der Tafel, wenn man sie hinreichend verlängert, in einem Punkte zusammen. — Denn wenn die Parallelen AB und CD die Tafel schneiden, so gilt dieß auch von der ihnen parallelen Kante PQ; es müssen sich daher auch nach § 7 u. 10 die Durchschnittslinien ab, cd und PQ in einem Punkte vereinigen, (der natürlich in der Ebene der Tafel abcd liegt).

Da die Ebene der Tafel gewöhnlich vertical gedacht wird, so erklärt sich hieraus, warum verticale Linien allemal parallele Bilder geben, während dieß nur von solchen horizontalen parallelen Linien gilt, die der Ebene der Tafel parallel sind. Im entgegengesetzten Falle convergiren die Bilder nach der Seite hin, nach welcher sich die Linien von der Tafel entfernen, weil offenbar nach dieser Seite hin sich PQ der Tafel nähert und dieselbe schneidet, (wenn nehmlich — wie immer in der Zeichenkunst — die Tafel sich zwischen dem Auge und den abzubildenden Linien befindet).

5) Wenn zwei Linien, die nicht in der Ebene der Tafel liegen, sich schneiden, so schneiden sich auch ihre Bilder in dem Punkte, in welchem die aus dem Auge nach dem Durchschnittspunkte der gegebenen Linien gezogene Linie die Ebene der Tafel trifft; ist aber diese Linie der Ebene der Tafel parallel, so sind die Bilder parallele Linien.

Dritter Abschnitt.

Vom körperlichen Dreiecke.

---

§ 62. Erklärung.

Wenn sich drei oder mehr Ebenen in Linien (Kanten) durchschneiden, die alle in demselben Punkte (Spitze) zusammen-

stoßen, so heißt der zwischen denselben liegende, nach einer Seite hin unbegrenzte Raum ein körperliches Vieleck. Die Linienwinkel, welche das Vieleck begrenzen, heißen die Seiten desselben und die Flächenwinkel, welche die Ebenen dieser Linienwinkel (auf der Seite, auf welcher das Vieleck liegt) einschließen, werden die Winkel des Vielecks genannt.

So hat z. B. das Vieleck in Fig. 39 die Spitze A, die Kanten AB, AC, AD, AE, zu Seiten die Linienwinkel BAC, CAD, DAE, EAB, zu Winkeln die Flächenwinkel CBAE, DCAB, EDAC, BEAD. — Der Kürze wegen wird man im Folgenden den Flächenwinkel CBAE auch durch Winkel (AB) bezeichnen und eben so die andern.

Man theilt natürlich die Vielecke in Dreiecke, Vierecke u. s. w.

Uebrigens werden im Folgenden nur solche Vielecke betrachtet werden, welche hohle Seiten und Winkel haben.

Anm. Durch diese Beschränkung wird der Allgemeinheit wenig Eintrag gethan, da es sehr leicht ist, wenn irgendwo in der Anwendung (etwa in der Astronomie) ein Vieleck mit erhabenen Seiten oder Winkeln in Betracht gezogen werden sollte, die Betrachtung auf ein Vieleck mit nur hohlen Seiten und Winkeln zurückzuführen.

§ 63. Lehrsatz.

Wenn man die Seiten und Kanten eines körperlichen Dreiecks über die Spitze fortsetzt, so entsteht ein neues Dreieck, welches mit dem gegebenen die Spitze gemeinschaftlich hat und mit demselben in allen Seiten und Winkeln übereinstimmt, ohne ihm congruent zu sein. — Man nennt die beiden Dreiecke Scheiteldreiecke.

Beweis. In Figur 40 haben die Scheiteldreiecke ABCD und Abcd die Spitze A gemeinschaftlich; ferner ist Linienwinkel BAC = bAc, BAD = bAd, CAD = cAd und Flächenwinkel (AB) = (Ab), (AC) = (Ac), (AD) = (Ad). Die Dreiecke sind aber doch nicht congruent; denn wollte man versuchen, die Dreiecke zum Decken zu bringen, so würde man zunächst ein Paar gleiche Seiten, z. B. BAD und bAd auf einander legen, so daß die Spitze A auf A, Kante AB auf Ab, AD auf ad fällt. Dann würden sich wohl diese Seiten aber nicht die Dreiecke decken, indem das eine ABCD vor, das andere Abcd hinter dieser gleichen Seite liegt. Wollte man, um diesen Uebelstand zu vermeiden, das Dreieck ABCD umdrehen, so werden sich die gleichen Seiten BAD und bAd jetzt nicht

anders zum Decken bringen lassen, als daß man AB auf Ad und AD auf Ab legt. Dann decken sich aber die Dreiecke nicht nothwendig, indem nicht Flächenwinkel (AB) = Ad) und (AD) = (Ab) vorausgesetzt ist. — Demnach stimmen die beiden Dreiecke wohl in allen Seiten und Winkeln überein, sind aber doch nicht congruent.

Bemerkung. Aehnliches kann in gleicher Art von körperlichen Vielecken überhaupt dargethan werden.

§ 64. Erklärung.

Zwei körperliche Vielecke, welche in allen Seiten und Winkeln übereinstimmen, ohne congruent zu sein, heißen symmetrisch.

*§ 65. Lehrsatz.

Wenn man aus einem Punkte innerhalb eines Dreiecks Lothe auf die drei Seiten fällt, so wird durch diese Lothe ein neues Dreieck bestimmt, dessen Seiten und Winkel die Winkel und Seiten des gegebenen Dreiecks zu 180° ergänzen.

Beweis. Das Dreieck sei ABCD (Fig. 40*), der innerhalb angenommene Punkt E, die Lothe EF, EG, EH und das neue Dreieck also EFGH. — Da die Ebene EHDF durch die Lothe EH und EF geht, so ist sie auf den Ebenen BAD und CAD senkrecht, deshalb HDF der zum Flächenwinkel (AD) gehörige Linienwinkel, und da im Vierecke EHDF die Winkel bei F und H rechte sind, so ist Linienwinkel HEF + HDF = 180°, also auch

Linienwinkel HEF + Flächenwinkel (AD) = 180°*)

Eben so ist:

Linienwinkel GEF + Flächenwinkel (AC) = 180°
und ⸗ GEH + ⸗ (AB) = 180°.

Ferner ist offenbar Linienwinkel CFD der zum Flächenwinkel (EF) gehörige Linienwinkel, und da im Vierecke ACFD bei C und D rechte Winkel sind, Linienwinkel CAD + CFD = 180°, folglich auch Linienwinkel CAD + Flächenwinkel (EF) = 180°;
eben so ist ⸗ BAD + ⸗ (EH) = 180°
und ⸗ BAC + ⸗ (EG) = 180°.

Bemerkung. Man hat um größerer Einfachheit willen die Figur so entworfen, daß der Punkt A auch innerhalb des Dreiecks EFGH fällt. Sind die Winkel des gegebenen Dreiecks alle spitz, so kann kein anderer Fall eintreten, wie man auch immer den Punkt

*) In diesen Ausdrücken hat man sich natürlich statt der Größen ihre nach Graden ausgedrückten Zahlenwerthe gesetzt zu denken.

(innerhalb des Dreiecks ABCD) wählen mag. Diese Wahl ist jedoch nicht mehr gleichgültig, wenn das gegebene Dreieck auch einen oder mehrere stumpfe Winkel enthält, indem dann der Punkt A auch außerhalb des Dreiecks EFGH oder in eine Seite desselben fallen kann. Es ist indeß doch allemal möglich, den Punkt E so anzunehmen, daß A in das Dreieck EFGH hineinfällt. Denn wenn man den Linienwinkel CAD durch irgend eine Linie AF in zwei spitze Winkel theilt und durch einen beliebigen Punkt F dieser Linie zwei Ebenen EGCF und EHDF senkrecht auf AC und AD legt, so liegt offenbar A zwischen den Schenkeln des hohlen Flächenwinkels (EF). Theilt man nun auch den Linienwinkel BAD durch irgend eine Linie AH in zwei spitze Winkel, und legt durch den Punkt H, in welchem die Linie AH die Linie HD schneidet, eine Ebene senkrecht auf AB, so liegt A zwischen den Schenkeln des hohlen Flächenwinkels (EH). Da nun der Punkt A innerhalb der beiden Flächenwinkel (EF) und (EH) liegt, so muß er offenbar innerhalb des Dreiecks EFGH liegen.

*§ 66. Erklärung.

Zwei Dreiecke, in denen die Seiten des einen die Winkel des andern und die Winkel des einen die Seiten des andern zu 180° ergänzen, heißen Ergänzungsdreiecke.

Bemerkung. Das Ergänzungsdreieck wird auch erhalten, wenn man in der Spitze eines gegebenen Dreiecks auf den drei Seiten desselben Lothe errichtet. Diese Constructionsweise ist einfacher, als die oben angegebene; sie läßt sich aber weniger leicht durch eine Zeichnung veranschaulichen.

§ 67. Lehrsatz.

In jedem körperlichen Dreiecke ist die Summe zweier Seiten größer, als die dritte.

Beweis. Um zu beweisen, daß BAC + CAD > BAD (Fig. 41) ist, lege man an CAB einen Winkel CAE = CAD, nehme in AE und AB zwei beliebige Punkte F und G an, mache AH = AG und ziehe GF, HF und HK; — dann ist $\triangle$ HAK $\cong$ GAK (AH = AG, AK = AK, W. HAK = GAK), folglich HK = GK. Da nun im Liniendreiecke HKF bekanntlich HK + KF > HF ist, so ist auch GF > HF und (nach § 72 der Planimetrie) auch W. GAF > HAF, (weil in den Dreiecken GAF und HAF Seite AF = AF, AG = AH, GF > HF ist); d. h. es ist W. BAC + CAD > BAD.

Bemerkung. In der Figur ist angenommen, daß die beiden Winkel BAC und CAD zusammen noch keinen Flachen ausmachen; im entgegengesetzten Falle würde es des Beweises, daß

ihre Summe > BAD ist, nicht bedürfen, da BAD (nach § 62) jedenfalls kleiner, als ein Flacher ist.

Von Dreiecken aber, welche erhabene Winkel und Seiten enthalten, gilt der Satz nicht mehr.

§ 68. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke betragen die drei Seiten zusammen weniger, als zwei Flache.

Beweis. Man verlängere eine Kante AB des Dreiecks ABCD (Fig. 42) über die Spitze A nach E, so entsteht ein neues Dreieck AECD. In diesem ist nach dem vorherg. §:

$$CAD < CAE + DAE;$$

folglich auch, wenn wir auf beiden Seiten CAB + DAB addiren:

$$CAD + CAB + DAB < CAE + DAE + CAB + DAB;$$

das heißt, da $CAE + CAB = \pi$ und $DAE + DAB = \pi$ ist, die drei Seiten des Dreiecks ABCD sind zusammen kleiner, als zwei Flache.

§ 69. Zusatz.

In jedem körperlichen Vielecke betragen alle Seiten zusammen weniger, als zwei Flache.

Beweis. Es sei zunächst ein Viereck ABCDE (Fig. 43) gegeben. Man erweitere zwei Seiten, die durch eine zwischenliegende getrennt sind, z. B. BAE und CAD, bis zum Durchschnitte in AF; dann entsteht ein Dreieck ABCF, in welchem (nach dem vorhergeh. §) die drei Seiten zusammen kleiner sind, als 360°, also

$$BAC + CAD + DAF + EAF + BAE < 360^\circ.$$

Weil nun im Dreiecke ADEF

$$DAE < DAF + EAF$$

ist, so ist um so mehr:

$$BAC + CAD + DAE + BAE < 360^\circ.$$

Auf ganz ähnliche Weise läßt sich dasselbe für's Fünfeck durch Zurückführung auf das Viereck darthun. Aehnliches gilt vom Sechseck, Siebeneck u. s. w.

*§ 70. Lehrsatz.

In jedem körperlichen Dreieck betragen die drei Winkel zusammen mehr, als einen, aber weniger, als drei Flache.

Beweis. Sie betragen zunächst weniger, als drei Flache, da jeder (nach § 62) kleiner, als ein Flacher angenommen ist. Sie machen aber zusammen mehr, als einen Flachen aus; denn bildet man das Ergänzungsdreieck und bezeichnet die Seiten desselben mit

α, β, γ, so sind die Winkel des gegebenen Dreiecks $180^0 - \alpha$, $180^0 - \beta$, $180^0 - \gamma$, also alle drei zusammen

$$540^0 - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Nun sind aber (nach § 68) die Seiten eines jeden Dreiecks zusammen kleiner, als zwei Flache, also

$$\alpha + \beta + \gamma < 360^0;$$

daher ist $540^0 - (\alpha + \beta + \gamma) > 180^0$,

d. h. die Winkelsumme ist größer, als ein Flacher.

*§ 71. Lehrsatz.

Sind in einem Dreiecke zwei Winkel gleich, so sind auch die gegenüberstehenden Seiten gleich.

Beweis. Man lege das Dreieck ABCD (Fig. 40), in welchem Flächenwinkel (AB) = (AD) vorausgesetzt ist, mit seinem Scheiteldreiecke ABcd so zusammen, daß der Punkt A liegen bleibt, Kante AB auf Ad, Kante AD auf Ab fällt; dann fällt auch Ebene BAC auf dAc, weil nach der Voraussetzung W. (AB) = (Ad) ist, und Ebene CAD auf cAb, weil W. (AD) = (Ab) ist. Da nun die Ebenen zusammengefallen sind, so müssen auch die gemeinschaftlichen Kanten AC und Ac auf einander fallen. Demnach ist Linienwinkel BAC = dAc = DAC.

*§ 72. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke liegt dem größern Winkel auch eine größere Seite gegenüber.

Beweis. Es sei im Dreiecke ABCD (Fig. 44) Winkel CDAB > CBAD. Man mache Winkel EDAB = CBAD; dann ist (nach dem vorhergeh. §) im Dreiecke ABED Seite EAB = EAD. Nun ist aber im Dreiecke AECD Seite EAD + EAC > CAD, also auch EAB + EAC > CAD, d. h. BAC > CAD.

*§ 73. Zusatz.

1) Im gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie gleich.

2) In jedem Dreiecke liegt der größern Seite ein größerer Winkel gegenüber.

Beweis. Beide Behauptungen sind unmittelbare Ergebnisse aus den beiden vorhergeh. §.

*§ 74. Zusatz.

Aus dem vorhergeh. § und dem Beweise von § 71 folgt auch noch, daß gleichschenklige Dreiecke, welche in allen Seiten und Winkeln übereinstimmen, (niemals blos symmetrisch,) sondern jedesmal wirklich congruent sind.

Bemerkung. Die in den vorhergehenden Sätzen befolgte Anordnung konnte mit der in der Planimetrie bei den verwandten Sätzen (§§ 59, 60 und 61) beobachteten Folge darum nicht übereinstimmen, weil hier das dort angewendete Beweismittel ausfällt, daß die Summe der drei Winkel eines Dreiecks ein Flacher ist. Dagegen hätten die in Rede stehenden Sätze über das Liniendreieck in der Planimetrie eben so geordnet und bewiesen werden können, wie hier in der Stereometrie die Sätze vom körperlichen Dreiecke. — In den nächsten Paragraphen findet fast vollkommene Uebereinstimmung statt.

*§ 75. Lehrsatz.

Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich groß, so stimmen die Dreiecke auch in den übrigen gleichliegenden Stücken überein.

Beweis. Das eine Dreieck ist entweder dem andern oder dem Scheiteldreiecke des andern congruent, was eben so wie in der Planimetrie (§ 66) erwiesen wird.

*§ 76. Lehrsatz.

Sind in zwei Dreiecken eine Seite und zwei anliegende Winkel gleich groß, so stimmen die Dreiecke auch in den übrigen gleichliegenden Stücken überein.

Der Beweis ist derselbe, wie der des vorhergeh. §; auch folgt der Satz aus diesem und § 65.

*§ 77. Lehrsatz.

Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten gleich, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so liegt dem größern Winkel auch eine größere Seite gegenüber.

Der Beweis ist derselbe wie von dem gleichlautenden Satze (§ 70 Anm.) in der Planimetrie, indem die beiden Sätze, auf welche sich jener Beweis stützt, wie man leicht sieht, auch in der Stereometrie gelten, nehmlich:

Wenn zwei Dreiecke die Grundlinie gemeinschaftlich haben und

1) die Seiten des einen die Seiten des andern einschließen, so ist die Summe der einschließenden Seiten größer, als die Summe der eingeschlossenen; und

2) wenn ein Paar Seiten sich durchschneiden, so ist die Summe der sich schneidenden Seiten größer, als die Summe der sich nicht schneidenden Seiten.

*§ 78. Lehrsatz.

Stimmen zwei Dreiecke in den drei Seiten überein, so sind auch ihre Winkel gleich.

Der Beweis ist derselbe, wie in der Planimetrie (§ 71).

*§ 79. Lehrsatz.

Sind in einem Dreiecke die drei Winkel so groß, als in einem andern, so stimmen die Dreiecke auch in den Seiten überein.

Beweis. Stimmen die Dreiecke in den Winkeln überein, so stimmen ihre Ergänzungsdreiecke offenbar in den Seiten, also nach dem vorhergeh. § auch in den Winkeln überein, und dem zufolge sind in den gegebenen Dreiecken die Seiten gleich groß.

Anm. Dieser in der Stereometrie richtige Satz würde aus bald einleuchtenden Gründen in der Planimetrie ganz falsch sein.

*§ 80. Lehrsatz.

Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und einem Winkel an der dritten Seite übereinstimmen, so sind entweder auch alle übrigen gleichliegenden Stücke in beiden Dreiecken gleich groß, oder die beiden andern Winkel an der dritten Seite ergänzen sich zu einem Flachen.

Der Beweis ist ganz derselbe, wie der des gleichlautenden Satzes (§ 73) in der Planimetrie. *)

*§ 81. Lehrsatz.

Wenn zwei Dreiecke in zwei Winkeln und einer dem dritten anliegenden Seite übereinstimmen, so sind entweder auch alle übrigen Stücke in beiden Dreiecken gleich groß, oder die beiden andern Seiten am dritten Winkel ergänzen sich zu 180°.

Beweis. Denn nach dem vorhergeh. § müssen entweder ihre Ergänzungsdreiecke, also auch die gegebenen Dreiecke selbst in allen Stücken übereinstimmen, oder es ergänzen sich dort zwei Winkel, hier zwei Seiten zu 180°.

---

*) Dagegen gilt § 74 der Planimetrie keineswegs von körperlichen Dreiecken.

Vierter Abschnitt.

Von den eckigen Körpern.

A. Von den regelmäßigen Körpern.

§ 82. Erklärung.

Ein überall begrenzter Raum heißt ein Körper (im engern Sinne).

Ein Körper, dessen Grenzen sämmtlich geradlinige Figuren sind, wird ein eckiger Körper oder Polyeder genannt.

Ein eckiger Körper heißt regelmäßig, wenn er von lauter regelmäßigen Vielecken, die in congruenten körperlichen Ecken zusammenstoßen, eingeschlossen wird.

§ 83. Zusatz.

Es kann nicht mehr als fünf regelmäßige Körper geben; diese sind:

das Tetraeder begrenzt von 4 regelmäßigen Dreiecken;
„ Hexaeder „ „ 6 „ Vierecken;
„ Octaeder „ „ 8 „ Dreiecken;
„ Dodecaeder „ „ 12 „ Fünfecken;
„ Icosaeder „ „ 20 „ Dreiecken.

Beweis. Nach § 68 und 69 betragen die Winkel, welche eine körperliche Ecke einschließen, allemal weniger, als 360°. — Im gleichseitigen Dreiecke hat jeder Winkel 60°; drei dieser Winkel in eine Ecke verbunden, machen 180°, also weniger, als 360° aus. Aus dieser Verbindung entsteht das Tetraeder.

Es lassen sich aber auch vier solcher Winkel in eine Ecke zusammenstellen, wodurch das Octaeder hervorgeht, indem $4 . 60 = 240 < 360$ ist.

Ferner geben noch fünf Winkel des gleichseitigen Dreiecks 300°, also weniger, als 360°; durch diese Zusammenstellung wird das Icosaeder erhalten.

Dagegen würden sechs solcher Winkel gerade 360° ausmachen, und es kann daher außer den genannten keinen von Dreiecken eingeschlossenen regelmäßigen Körper geben.

Im Quadrat hat jeder Winkel 90°, deren drei also 270°; diese Verknüpfung liefert das Hexaeder (Würfel).

Vier rechte Winkel enthalten gerade 360°; demnach gibt es nur den einen von Quadraten begrenzten regelmäßigen Körper.

Im regelmäßigen Fünfecke betragen alle Winkel zusammen drei Flache oder 540° (Planimetrie § 116); auf einen kommen folglich 108° und auf drei 324°, also weniger, als 360°. Der hieraus hervorgehende Körper ist das Dodecaeder. — Dagegen enthalten vier solcher Winkel 432°, und es kann folglich außer dem Dodecaeder kein regelmäßiger Körper von Fünfecken begrenzt werden.

Im regelmäßigen Sechseck hat jeder Winkel 120°, drei derselben haben also schon 360°, und es gibt folglich überhaupt keinen von Sechsecken eingeschlossenen regelmäßigen Körper. — — Dieß gilt um so mehr von Siebenecken, Achtecken u. s. f., da die Größe der Winkel eines regelmäßigen Vielecks mit der Zahl seiner Seiten wächst.

Anm. Durch den vorhergehenden Satz ist nur dargethan, daß es keine andern, als die genannten regelmäßigen Körper geben kann; daß dieselben jedoch wirklich vorhanden sind, ist hiermit noch keineswegs bewiesen. Da der Beweis indeß für das Folgende ohne besondere Wichtigkeit ist, so ist er hier der Kürze wegen übergangen. — Der Anfänger wird übrigens nur durch das Vorzeigen von Modellen eine deutliche Vorstellung von jenen Körpern erhalten können.

B. Vom Prisma.

§ 84. Erklärung.

Ein nach zwei Seiten hin unbegrenzter Raum, der von Ebenen eingeschlossen wird, welche sich sämmtlich in parallelen Linien durchschneiden, heißt ein prismatischer Raum, und die ihn begrenzenden Ebenen heißen seine Seitenflächen.

§ 85. Zusatz.

Werden die Seiten eines prismatischen Raumes von parallelen Ebenen durchschnitten, so sind die Durchschnitte congruente Vielecke.

Beweis. Sie stimmen in allen Winkeln überein, weil ihre Schenkel (nach § 14) parallel laufen, (AB || ab [Fig. 45], AD || ad, also W. BAD = bad u. s. f.) und in allen Seiten, weil die von den Seitenflächen abgeschnittenen Vierecke Parallelogramme sind (AD || ad, Aa || Dd, folglich auch AD = ad u. s. f.)

§ 86. Erklärung.

Wenn man die Seitenflächen eines prismatischen Raumes durch zwei parallele Ebenen durchschneidet, so heißt der zwischen denselben enthaltene vollständig begrenzte Körper ein Prisma. — Ein Prisma ist also ein eckiger Körper, welcher von zwei congruenten und parallelen Vielecken, als Grundflächen, und von

Parallelogrammen, als Seitenflächen, eingeschlossen wird. Die Linien, in welchen sich die Seitenflächen eines Prisma durchschneiden, heißen Seitenkanten oder vorzugsweise Kanten; die Durchschnittslinien zwischen den Seitenflächen und den Grundflächen werden Grundkanten genannt.

Der senkrechte Abstand der beiden Grundflächen von einander heißt die Höhe des Prisma's.

Ein Prisma heißt gerade, wenn die (Seiten-) Kante auf der Grundfläche senkrecht ist.

§ 87. Zusatz.

1) Im geraden Prisma sind die Seitenflächen sämmtlich Rechtecke, und

2) ein Prisma ist gerade, wenn zwei zusammenstoßende Seitenflächen Rechtecke sind.

Beweis. 1) Wenn die Kante AE (Fig. 46) senkrecht auf der Grundfläche EFGH steht, so ist W. AEF = 90°, und daher (nach § 100 der Planimetrie) das Parallelogramm AEFB ein Rechteck. Dasselbe gilt eben so von den übrigen Seitenflächen; denn wenn eine Kante ein Loth ist, so sind es (nach § 32, 1) auch die übrigen.

2) Wenn die Seitenflächen AEFB und AEHD Rechtecke sind, so ist AE ⊥ EF und EH und daher (nach § 39) AE auch ein Loth auf der Ebene EFGH.

§ 88. Erklärung.

Ein Prisma, dessen Grundfläche Parallelogramme sind, also ein Körper, welcher überhaupt von sechs Parallelogrammen eingeschlossen ist (ABCDEFGH, Fig. 47), heißt ein Parallelepipedum. — Das Parallelepipedum heißt rechtwinklig, wenn Grundflächen und Seitenflächen Rechtecke sind; sind dieselben überdieß sämmtlich Quadrate, so entsteht das Hexaeder, welches man auch Würfel oder Cubus nennt.

§ 89. Zusatz.

Im Parallelepipedum sind auch die gegenüberstehenden Seitenflächen parallel und congruent. — Man kann daher jedes Paar gegenüberstehender Seitenflächen als Grundflächen ansehen.

Beweis. Die Seitenflächen AEHD und BFGC (Fig. 47) sind zunächst parallel, weil zwei sich schneidende Linien in der einen zweien sich schneidenden Linien in der andern parallel sind, (z. B. AD ∥ BC, weil nach der Voraussetzung ABCD ein Parallelo-

gramm ist, und AE || BF). — Sie sind congruent, weil sie in allen Seiten (AD = BC, als gegenüberstehende Seiten des Parallelogramms ABCD, AE = BF u. s. w.) und in allen Winkeln (z. B. Winkel DAE = CBF, als Winkel mit parallelen Schenkeln) übereinstimmen.

C. Von der Pyramide.

§ 90. Erklärung.

Wenn man die Seiten einer körperlichen Ecke durch eine Ebene durchschneidet, so heißt der hierdurch von der Ecke abgeschnittene Körper eine Pyramide. — Eine Pyramide (ABCDE, Fig. 48) ist also ein Körper, welcher von einem Vielecke (BCDE) als Grundfläche und von Dreiecken als Seitenflächen, welche alle in einem Punkte, der Spitze (A), zusammenstoßen, begrenzt wird.

Ein Loth (AG), aus der Spitze auf die Grundfläche gefällt, heißt die Höhe der Pyramide.

Anm. 1. Man pflegt bei der Benennung einer Pyramide ABCDE (Fig. 48) zuerst die Spitze A und dann die Grundfläche BCDE zu nennen.

Anm. 2. Die Pyramide ist unter den Körpern das, was das Dreieck unter den Vielecken ist. Während aber die Sätze, welche der Scharfsinn der Mathematiker über das Dreieck aufgefunden hat, nicht zu zählen sind, kennt man nur wenige Sätze über die Pyramide. — Wir führen hier als Beispiel die beiden folgenden auf:

1) In jeder Pyramide ist die Summe der Seitenflächen größer, als die Grundfläche.

Denn wenn zunächst die Höhe der Pyramide innerhalb oder in eine Seitenfläche fällt, so ist die Grundfläche gleich der Summe der Projectionen der Seitenflächen auf die Ebene der Grundfläche und folglich nach § 59 kleiner, als die Summe der Seitenflächen selbst. — Wenn aber die Höhe außerhalb fällt, so ist die Grundfläche sogar kleiner, als die Summe der Projectionen der Seitenflächen.

2) Wenn in einer dreiseitigen Pyramide (ZAYX, Fig. 37), welche also von vier Dreiecken eingeschlossen ist, die Ebenen von dreien dieser Dreiecke (AZX, AZY und AXY) auf einander senkrecht stehen, so ist die Summe der Quadrate der Inhalte dieser drei Dreiecke gleich dem Quadrate des Inhalts des vierten Dreiecks (ZXY) zu Folge des in der Anm. zu § 60 unter Nr. 3 erwiesenen Satzes, indem nehmlich die Dreiecke AZX, AZY und AXY die Projectionen des Dreiecks ZXY auf drei Ebenen sind, welche auf einander senkrecht stehen.

Dieser Satz bildet eine Analogie zum pythagoräischen Lehrsatze in der Planimetrie.

§ 91. Erklärung.

Eine Pyramide heißt regelmäßig (im weitern Sinne), wenn ihre Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck und ihre Seitenflächen gleichschenklige Dreiecke sind.

§ 92. Zusatz.

Die Höhe einer regelmäßigen Pyramide trifft die Grundfläche im Mittelpunkte.

Beweis. Die rechtwinkligen Dreiecke GHA und GHB (Fig. 49) sind congruent, da sie in den Hypotenusen GA und GB und der gemeinschaftlichen Cathete GH übereinstimmen; folglich ist auch AH = BH.

Aus gleichen Gründen ist BH = CH = DH u. s. w.; also ist H der Mittelpunkt der Grundfläche.

§ 93. Lehrsatz.

Wenn man die Seitenfläche einer Pyramide mit einer der Grundfläche parallelen Ebene durchschneidet, so ist der Durchschnitt eine der Grundfläche ähnliche Figur, und diese beiden ähnlichen Figuren verhalten sich wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze.

Beweis. Wenn die Ebene bcde $\parallel$ BCDE (Fig. 48) ist, so sind zunächst die Linien, in denen sie von den Seitenflächen geschnitten werden, nach § 14 parallel, nehmlich bc $\parallel$ BC, cd $\parallel$ CD, de $\parallel$ DE, be $\parallel$ BE, und daher (nach § 13) W. bcd = BCD, cde = CDE, deb = DEB, ebc = EBC; also stimmen die Vielecke in allen Winkeln überein. Dasselbe gilt auch von dem Verhältniß der gleichliegenden Seiten; da nehmlich bc $\parallel$ BC und cd $\parallel$ CD ist,

so verhält sich: $bc : BC = Ac : AC$

und $cd : CD = Ac : AC$,

folglich auch $bc : BC = cd : CD$.

Eben so wird die Gleichheit der übrigen Verhältnisse zwischen den gleichliegenden Seiten erwiesen. — Demnach ist Vieleck bcde $\sim$ BCDE.

Da sich nun ähnliche Vielecke (nach § 210 der Planimetrie) wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten verhalten, so ist

$$bcde : BCDE = bc^2 : BC^2.$$

Weiter ist aber $bc : BC = Ab : AB$,

und wenn durch die Höhe AG und die Kante AB eine Ebene gelegt wird, so schneidet diese die parallelen Ebenen in den parallelen Linien bg und BG, und es verhält sich folglich:

$$Ab : AB = Ag : AG,$$

also auch $$bc : BC = Ag : AG$$

und $$bc^2 : BC^2 = Ag^2 : AG^2.$$

Oben ist $bcde : BCDE = bc^2 : BC^2$ erwiesen; es verhält sich daher auch $$bcde : BCDE = Ag^2 : AG^2.$$

Anm. Dieser an sich wichtige und für die Ausmessung der Pyramide unentbehrliche Satz wird noch durch seine vielfachen Anwendungen in der Naturlehre besonders merkenswerth.

§ 94. Erklärung.

Wenn eine Pyramide (ABCDE, Fig. 48) von einer der Grundfläche (BCDE) parallelen Ebene (bcde) durchschnitten wird, so heißt der zwischen den beiden parallelen Ebenen enthaltene Theil (bcdeBCDE) eine abgekürzte Pyramide.

Die abgekürzte Pyramide wird also von zwei parallelen und ähnlichen Vielecken als Grundflächen und von Trapezen als Seitenflächen begrenzt, und die Verlängerungen der Seitenkanten vereinigen sich alle in dem nehmlichen Punkte.

D. Vom Obelisken.

§ 95. Erklärung.

Ein Körper (ABCDEA'B'C'D'E', Fig. 50), welcher von zwei parallelen Vielecken, als Grundflächen (ABCDE und A'B'C'D'E') und von Trapezen *), als Seitenflächen, eingeschlossen wird, heißt ein Obelisk.

Der senkrechte Abstand der beiden Grundflächen von einander wird die Höhe des Obelisken genannt.

Anm. Zu Folge der vorstehenden Erklärung schließt der weitere Begriff des Obelisken die engern Begriffe des Prisma's und der abgekürzten Pyramide in sich, indem bei jenem noch das Merkmal hinzutritt, daß die Seitenkanten AA', BB', CC', DD' und EE' parallel laufen, bei dieser, daß die Verlängerungen sämmtlicher Seitenkanten sich in dem nehmlichen Punkte vereinigen, zwei Bedingungen, welche von den Seitenkanten eines Obelisken nicht erfüllt zu werden brauchen.

§ 96. Zusatz.

1) Die beiden Grundflächen eines Obelisken stimmen der Reihe nach in den Winkeln überein.

2) Ein Obelisk, dessen Grundflächen auch in der Größe der gleichliegenden Seiten der Grundflächen übereinstimmen, also congruent sind, ist ein Prisma, und

---

*) Vergl. § 108 der Planimetrie.

3) ein Obelisk, dessen Grundflächen im Verhältnisse der gleichliegenden Seiten übereinstimmen, also ähnlich sind, ist eine abgekürzte Pyramide.

4) Jeder dreiseitige Obelisk ist entweder ein Prisma oder eine abgekürzte Pyramide.

Beweis. 1) Der gegebene Obelisk sei Obelisk ABCDEA′B′C′D′E′ (Fig. 50); da die Ebenen der Grundflächen ABCDE und A′B′C′D′E′ nach dem vorhergeh. § einander parallel sind, so müssen auch die Durchschnittslinien, in welchen sie von einer dritten Ebene durchschnitten werden, parallel sein, also

$$AB \parallel A'B',\ BC \parallel B'C',\ CD \parallel C'D' \text{ u. s. w.};$$

folglich sind auch nach § 13 die von diesen Linien eingeschlossenen Winkel einander gleich, nehmlich

W. $ABC = A'B'C'$, $BCD = B'C'D'$ u. s. w.

2) Wie wir so eben gesehen haben, sind bei einem jeden Obelisken die gleichliegenden Seiten der Grundflächen einander parallel,

$$AB \parallel A'B',\ BC \parallel B'C',\ CD \parallel C'D' \text{ u. s. w.}$$

Wenn diese Linien nun überdieß noch einander gleich sind, so sind die Vierecke ABA′B′, BCB′C′, CDC′D′ u. s. w.
sämmtliche Parallelogramme, folglich auch die Seitenkanten

AA′, BB′, CC′ . . .

alle einander parallel und daher der Obelisk ABCDA′B′C′D′ nach § 84 und 86 ein Prisma.

3) Wenn dagegen die gleichliegenden Seiten der Grundflächen nicht gerade gleiche Größe, aber doch einerlei Verhältniß zu einander haben,

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' \text{ u. s. w.},$$

gegeben ist, so müssen sich die Verlängerungen sämmtlicher Seitenkanten AA′, BB′, CC′ . . . in dem nehmlichen Punkte vereinigen. Denn angenommen, die verlängerte Seitenkante AA′ träfe mit der verlängerten Seitenkante BB′ in einem Punkte X und die verlängerte Seitenkante CC′ mit BB′ in einem andern Punkte Z zusammen; dann müßte sich, da $AB \parallel A'B'$ und $BC \parallel B'C'$ ist, verhalten:

$$AB : A'B' = BX : B'X \text{ und } BC : B'C' = BZ : B'Z,$$

folglich auch, da nach der Voraussſ. $AB : A'B' = BC : B'C'$ ist:

$$BX : B'X = BZ : B'Z$$

und weiter nach einem bekannten Satze der Proportionen (§ 180, 11 der Planimetrie)

$$BX - B'X : B'X = BZ - B'Z : B'Z,$$

d. h.

$$BB' : B'X = BB' : B'Z,$$

was offenbar unmöglich ist. — Demnach müssen sich die verlängerten Seitenkanten AA′, BB′, und CC′ in dem nehmlichen Punkte durchschneiden, und da dasselbe eben so von den übrigen Seitenkanten erwiesen werden kann, so ist folglich der Obelisk ABCDE A′B′C′D′E′ eine abgekürzte Pyramide, wenn nehmlich vorausgesetzt ist, daß die beiden Vielecke ABCDE und A′B′C′D′E′ einander ähnlich sind.

4) Da die Grundflächen eines jeden Obelisken nach Nr. 1 in den Winkeln übereinstimmen und Dreiecke, welche gleiche Winkel haben, wenn nicht congruent, doch jedenfalls ähnlich sind, so ist vermöge Nr. 3 jeder dreiseitige Obelisk entweder ein Prisma oder eine abgekürzte Pyramide.

Anm. Die Richtigkeit der letzten Behauptung folgt außerdem auch aus § 11, nach welchem die Kanten, in denen sich drei Ebenen schneiden, entweder alle drei parallel sind, oder sich in dem nehmlichen Punkte vereinigen.

§ 97. **Lehrsatz**.

1) Wenn man die Seitenflächen eines Obelisken ABCDE A′B′C′D′E′ (Fig. 50) mit einer den Grundflächen parallelen Ebene in gleichem Abstande von denselben durchschneidet, so schließen die Durchschnittslinien ein Vieleck ($\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$) ein, dessen Seiten den halben Summen der gleichliegenden Seiten und dessen Winkel den gleichliegenden Winkeln der beiden Grundflächen des Obelisken gleich sind. — Man nennt dieses Vieleck ($\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$) die mittlere Durchschnittsfigur des Obelisken.

2) Wenn man aus einem beliebigen Punkte (f) in der Ebene des mittlern Durchschnitts Parallelen zu den Seitenkanten des Obelisken zieht und die Punkte, in welchen dieselben die Ebene einer der beiden Grundflächen schneiden, der Reihe nach mit einander verbindet, so entsteht ein Vieleck (abcde), dessen Seiten den halben Differenzen der gleichliegenden Seiten und dessen Winkel den gleichliegenden Winkeln der beiden Grundflächen des Obelisken gleich sind. — Dieses Vieleck (abcde) wird die Ergänzungsfigur der Grundflächen des Obelisken genannt.

3) Die Ergänzungsfigur wird immer als dieselbe erhalten, aus welchem Punkte der mittleren Durchschnittsebene und nach welcher der beiden Grundflächen die Parallelen mit den Seitenkanten des Obelisken gezogen werden.

Beweis. Da die Ebene $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon \parallel$ ABCDE ist, so ist auch

$\alpha\beta \parallel AB$, $\beta\gamma \parallel CD$, $\gamma\delta \parallel CD$ u. s. w.,

folglich W. $\alpha\beta\gamma = ABC$, W. $\beta\gamma\delta = BCD$ u. s. w.

Da ferner die Ebene $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ nach der Voraussetzung von den beiden Ebenen ABCDE und A'B'C'D'E' gleichen Abstand hat, so ist auch, wie leicht zu sehen:

$$A\alpha = A'\alpha,\ B\beta = B'\beta,\ C\gamma = C'\gamma \text{ u. s. w.}$$

folglich nach § 109 der Planimetrie

$$\alpha\beta = \frac{AB + A'B'}{2},\ \beta\gamma = \frac{BC + B'C'}{2} \text{ u. s. w.}$$

2) Wenn man $\alpha B'' \parallel \beta B$ zieht, so ist auch $\alpha B'' \parallel kb$, weil $kb \parallel \beta B$ vorausgesetzt ist, und da überdieß $ka \parallel \alpha A$ ist, so ist nach § 15 Ebene $akb \parallel A\alpha B''$, folglich auch die Durchschnittslinie

$$ab \parallel AB.$$

Eben so findet man

$$bc \parallel BC,\ cd \parallel CD \text{ u. s. w.};$$

Demnach ist zu Folge § 13

$$\text{W. } abc = ABC,\ bcd = BCD \text{ u. s. w.}$$

Weiter ist nach § 17, 3

$ak = A\alpha$, $bk = B''\alpha$ } weil die Ebene $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, in welcher der Punkt k angenommen ist, mit der Ebene ABCDE parallel ist

und nach § 13 W. $akb = A\alpha B''$, weil $ka \parallel \alpha A$ und $kb \parallel \alpha B''$ ist;

folglich ist $\triangle\ abk \cong AB''\alpha$

und $ab = AB''$.

Nach § 110 der Planimetrie ist aber AB'', also auch

$$ab = \frac{AB - A'B'}{2}.$$

Eben so findet man ferner

$$bc = \frac{BC - B'C'}{2},\ cd = \frac{CD - C'D'}{2} \text{ u. s. w.}$$

Die Behauptung (3) aber ist an sich klar, da Vielecke, welche in allen Seiten und Winkeln übereinstimmen, nothwendig congruent sind.

*§ 98. Lehrsatz.

Bei jedem Obelisken ist die halbe Summe der beiden Grundflächen (G und G') gleich der Summe aus der mittlern Durchschnittsfigur (M) und der Ergänzungsfigur (E), also in Zeichen

$$\frac{G + G'}{2} = M + E.$$

Beweis. Es sei zunächst ein dreiseitiger Obelisk ABCA'B'C' (Fig. 69) gegeben und $\alpha\beta\gamma$ die mittlere Durchschnittsfigur. Durch

eine Ecke derselben, α, ziehe man DD′ ‖ BB′ und EE′ ‖ CC′, ferner durch die Ecke β FF′ ‖ CC′; dann ist die mittlere Durchschnittsfigur

$$\alpha\beta\gamma = EFC = ABC - BDEF - ADE$$

und auch $\alpha\beta\gamma = E'F'C' = A'B'C' + B'D'E'F' - A'D'E'$,

folglich, da BDEF = B′D′E′F′, wie leicht zu sehen, und △ ADE, so wie auch △ A′D′E′ gleich der Ergänzungsfigur ADE ist:

$$2\alpha\beta\gamma = ABC + A'B'C' - 2ADE$$

oder $\frac{ABC + A'B'C'}{2} = \alpha\beta\gamma + ADE.$

Es sei ferner ein vierseitiger Obelisk ABCD A′B′C′D′ (Fig. 70) gegeben; — man lege durch eine Seitenkante AA′ eine willkührliche Ebene und erweitere die nicht durch diese Kante gehenden Seitenflächen BB′CC′ und CC′DD′, bis sie die Ebene in den Kanten EE′ und FF′ durchschneiden. Dann entstehen drei dreiseitige Obelisken CEFC′E′F′, ABEA′B′E′ und ADFA′D′F′. Wenn wir nun für diese und den gegebenen vierseitigen Obelisken ABCD A′B′C′D′ die mittleren Durchschnittsfiguren und die Ergänzungsfiguren nach Anleitung des vorhergeh. §. construiren und auf die schon mehr angewendete Art bezeichnen, so werden wir zu Folge des bereits für den dreiseitigen Obelisken geführten Beweises setzen können:

$$\frac{CEF + C'E'F'}{2} = \gamma\varepsilon\varphi + cef$$

$$\frac{ABE + A'B'E'}{2} = \alpha\beta\varepsilon + abe$$

$$\frac{ADF + A'D'F'}{2} = \alpha\delta\varphi + adf.$$

Subtrahiren wir die beiden letzten Gleichungen von der ersten, so ergiebt sich

$$\frac{ABCD + A'B'C'D'}{2} = \alpha\beta\gamma\delta + abcd.$$

Eben so läßt sich dasselbe für einen fünf- und mehrseitigen Obelisken darthun.

Anm. Man vergl. den Beweis zu § **147** und die Anm. **2** zu § **150.**

Anm. **1.** Wir haben uns im Beweise dieses und des vorherg. § auf den Fall beschränkt, welcher am häufigsten Anwendung findet, daß sämmtliche Seiten der einen Grundfläche größer sind, als die gleichliegenden Seiten der andern Grundfläche. Man wird sich jedoch auch in jedem besondern Falle, in welchem diese Bedingungen nicht erfüllt sein

sollten, leicht von der Richtigkeit der aufgestellten Behauptungen überzeugen können.

Sind wirklich in einem Obelisken sämmtliche Seiten der einen Grundfläche größer, als die gleichliegenden Seiten der andern, so folgt aus dem letzten Satze, daß die mittlere Durchschnittsfigur kleiner ist, als das arithmetische Mittel der Grundflächen um die Größe der Ergänzungsfigur.

Anm. 2. Nennt man eckige Körper ähnlich, wenn sie von ähnlichen Polygonen eingeschlossen werden und die Ecken des einen den Ecken des andern congruent sind, so lassen sich leicht folgende Sätze erweisen:

1) In ähnlichen Körpern sind die ähnlich liegenden Kanten und Seitenflächen proportionirt, und da sich diese wie die Quadrate ähnlich liegender Kanten verhalten, so stehen auch die ganzen Oberflächen in dem angezeigten Verhältniß zu einander.

2) Die Grundflächen ähnlicher Pyramiden oder Prismen verhalten sich nach (1) wie die Quadrate zweier ähnlich liegenden Seitenkanten, also auch wie die Quadrate der Höhen, da diese mit den Seitenkanten in ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken liegen.

3) Wird eine Pyramide durch eine der Grundfläche parallele Ebene durchschnitten, so ist die abgeschnittene kleinere Pyramide der ganzen ähnlich. (Vergl. Fig. 48 und § 93.)

Anm. 3. Auch der folgende allgemeine und merkwürdige Satz mag hier noch eine Stelle erhalten:

Bezeichnet man die Zahl der Flächen, welche einen eckigen Körper einschließen, mit F, die Zahl seiner Ecken und Kanten beziehlich mit E und K, so ist:

$$F + E = K + 2.$$

Hierbei wird jedoch vorausgesetzt, daß die Polygone, welche den Körper begrenzen, von zusammenhängenden gebrochenen Linien eingeschlossen werden; (denn für einen Körper, wie den durch Fig. 51 dargestellten, gilt der Satz nicht.)

Beweis. Wir wollen irgend eine Grenzfläche des Körpers die erste nennen und dann die übrigen so weiter zählen, daß jede folgende mit der nächstvorhergehenden eine Kante gemeinschaftlich hat, und wenn eine folgende Fläche mit mehreren vorhergehenden gemeinschaftliche Kanten hat, so sollen diese allemal eine zusammenhängende gebrochene Linie bilden. Diese Bedingung des Zählens ist, wie man leicht sieht, allemal zu erfüllen, den oben angegebenen Ausnahmefall abgerechnet, für welchen aber auch der Satz nicht mehr nothwendig gilt. Es sei ferner die Zahl der Kanten und Ecken, welche in der ersten Fläche liegen mit K_1 und E_1, dann die Zahl der Kanten und Ecken in den beiden ersten Grenzflächen zusammen mit K_2 und E_2, in den drei ersten mit K_3 und E_3 u. s. f. bezeichnet, so nehmlich, daß eine Ecke oder Kante, welche mehreren Grenzflächen gemeinschaftlich ist, immer nur einmal gezählt

wird. Hat nun das erste Polygon a Seiten, so ist $K_1 = a$ und $E_1 = a$, also
$$K_1 - E_1 = 0.$$

Das zweite Polygon, welches b Seiten haben mag, liefert nur $b - 1$ neue Kanten und $b - 2$ neue Ecken, weil es eine Kante und zwei Ecken mit dem ersten gemeinschaftlich hat. Demnach ist $K_2 = a + b - 1$ und $E_2 = a + b - 2$, folglich
$$K_2 - E_2 = 1.$$

Wird jetzt das dritte Polygon, dessen Seitenzahl c sein mag, hinzugefügt, so wird dieses entweder nur mit dem zweiten, oder sowohl mit dem zweiten, als mit dem ersten eine Kante gemeinschaftlich haben. — Im ersten Falle liefert es $c - 1$ neue Kanten und $c - 2$ neue Ecken im andern Falle $c - 2$ neue Kanten und $c - 3$ neue Ecken, also jedenfalls liefert es eine Kante mehr, als Ecken; demnach ist offenbar
$$K_3 - E_3 = 2.$$

Man sieht nun schon ganz deutlich, daß auch das vierte Polygon eine neue Kante mehr, als neue Ecken liefert, (es mag nun nur mit dem dritten, oder mit zweien der vorhergehenden, oder mit allen drei Polygonen gemeinschaftliche Kanten haben, wenn nur überhaupt der Körper mehr als vier Seitenflächen hat); und es ist folglich
$$K_4 - E_4 = 3.$$

Auf gleiche Weise findet man
$$K_5 - E_5 = 4,$$
(wenn nehmlich der Körper mehr als fünf Grenzflächen hat), — und wenn der Körper überhaupt von n Polygonen eingeschlossen ist, und von diesen $n - 1$ in der angegebenen Art verbunden sind:
$$K_{n-1} - E_{n-1} = n - 2.$$

Wird nun noch die letzte, nte Grenzfläche hinzugefügt, so ist klar, daß diese weder neue Ecken, noch neue Kanten liefert, und es ist daher auch
$$K_n - E_n = n - 2,$$
oder nach der oben angegebenen Bezeichnungsweise, wo $K_n = K$, $E_n = E$ und $n = F$ gesetzt ist,
$$K - E = F - 2,$$
also
$$K + 2 = F + E.$$

Der vorstehende Satz heißt der Euler'sche und der so eben angeführte sehr einfache Beweis desselben ist im Wesentlichen aus Grunert's Lehrb. der Stereom. entlehnt.

Fünfter Abschnitt.
Von den runden Körpern.

A. Vom Cylinder.

§ 99. Erklärung.

Wenn die Grundflächen eines Prismas regelmäßige Vielecke sind, und man denkt sich die Anzahl ihrer Seiten fortwährend wachsend, so nähern sich die Grundflächen immer mehr dem Kreise und das Prisma selbst einem Cylinder. — Ein Cylinder (Walze, Welle) ist nehmlich ein Körper, welcher von zwei parallelen Kreisen, als Grundflächen, und einer krummen Fläche, welche man Mantel nennt, eingeschlossen ist. Der Mantel hat die Eigenschaft, daß sich auf demselben gerade Linien ziehen lassen, welche alle unter sich und mit der Axe, d. h. mit der Linie, welche die Mittelpunkte der Grundflächen verbindet, parallel sind.

Der Cylinder heißt gerade, wenn die Axe auf der Grundfläche senkrecht steht, schief, wenn dieses nicht der Fall ist.

Anm. Ein gerader Cylinder entsteht, wenn ein Rechteck um eine Seite, als Axe, gedreht wird; die gegenüberliegende Seite beschreibt den Mantel, und die beiden andern Seiten beschreiben die Grundflächen des geraden Cylinders.

§ 100. Zusatz.

Aus der vorhergehenden Erklärung folgt:

1) Wenn man einen Cylinder mit einer Ebene durchschneidet, welche durch die Axe geht, so ist der Durchschnitt ein Parallelogramm; (beim geraden Cylinder ein Rechteck).

2) Wenn man einen Cylinder mit einer den Grundflächen parallelen Ebene durchschneidet, so ist der Durchschnitt ein Kreis.

§ 101. Zusatz.

1) Der Mantel des geraden Cylinders ist einem Rechtecke gleich, welches die Peripherie der Grundfläche zur Grundlinie und die Höhe des Cylinders zur Höhe hat.

2) Ist daher r der Radius, h die Höhe des Cylinders, so ist der Flächeninhalt des Mantels

$$M = 2r\pi h.$$

Beweis zu (2). Denn das Rechteck hat zur Höhe h und zur Grundlinie die Peripherie $2r\pi$ (§ 221 der Planimetrie).

Anm. 1. Wenn z. B. $r = 4'$, $h = 5'$ gegeben ist und wir statt π den Näherungswerth $3^1/_7$ setzen, so ist

$$M = 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3^1/_7 = 125^5/_7 \, \square'.$$

Anm. 2. Der Mantel des schiefen Cylinders läßt sich auf elementarem Wege nicht berechnen.

Anm. 3. Nennt man zwei gerade Cylinder ähnlich, wenn ihre Höhen sich wie die Durchmesser verhalten, so ergiebt sich noch leicht Folgendes:

Die Grundflächen, die Mäntel und folglich auch die ganzen Oberflächen zweier ähnlichen geraden Cylinder verhalten sich wie die Quadrate der Höhen oder Durchmesser.

B. Vom Kegel.

§ 102. Erklärung.

Wenn die Grundfläche einer Pyramide ein regelmäßiges Vieleck ist und man denkt sich die Anzahl der Seiten in's Unendliche wachsend, so geht die Grundfläche in einen Kreis und die Pyramide in einen Kegel über. — Ein Kegel ist nehmlich ein Körper, welcher von einem Kreise, als Grundfläche, und von einer krummen Fläche, welche Mantel heißt, eingeschlossen ist. Der Mantel hat die Eigenschaft, daß sich auf demselben gerade Linien ziehen lassen, welche sich alle in einem Punkte, der Spitze, vereinigen. Die Linie, welche die Spitze mit dem Mittelpunkte der Grundfläche verbindet, wird Axe, und eine Linie, aus der Spitze nach einem Punkte der Grundlinie gezogen, wird Seitenlinie genannt.

Ein Kegel heißt gerade, wenn die Axe auf der Grundfläche senkrecht steht.

Anm. Beim geraden Kegel sind alle Seitenlinien gleich lang, beim schiefen Kegel haben die Seitenlinien eine verschiedene Länge.

Ein gerader Kegel entsteht, wenn man ein rechtwinkliges Dreieck um eine Cathete, als Axe, dreht; die andere Cathete beschreibt die Grundfläche, und die Hypotenuse beschreibt den Mantel des geraden Kegels.

§ 103. Zusatz.

Aus der vorhergehenden Erklärung folgt:

1) Wenn man einen Kegel mit einer Ebene durchschneidet, welche durch die Axe geht, so ist der Durchschnitt ein Dreieck, (beim geraden Kegel, ein gleichschenkliges Dreieck).

2) Wenn man einen Kegel mit einer der Grundfläche parallelen Ebene durchschneidet, so erhält man zum Durchschnitt einen Kreis.

Das vom Kegel abgeschnittene Stück, welches zwischen der Grundfläche und dem ihr parallelen Kreise liegt, heißt ein abgekürzter Kegel.

§ 104. Zusatz.

1) Der Mantel des geraden Kegels ist einem Dreiecke gleich, welches die Seitenlinie zur Höhe und den Umfang der Grundfläche zur Grundlinie hat.

2) Ist daher M der Inhalt des Mantels, f die Seitenlinie, r der Radius der Grundfläche, so ist:

$$M = r\pi f.$$

Beweis. 1) Der Mantel des geraden Kegels läßt sich in einen Kreisausschnitt aufrollen, der die Seitenlinie zum Radius und die Peripherie der Grundfläche zum Bogen hat. Der Ausschnitt ist aber einem Dreiecke gleich, das den Radius (die Seitenlinie) zur Höhe und den Bogen (Umfang der Grundfläche) zur Grundlinie hat.

2) Die Formel für den Inhalt eines Dreiecks ist nach § 219 der Planimetrie: $J = \frac{gh}{2}$.

Im vorliegenden Falle ist $J = M$, $g = 2r\pi$ (vermöge § 221 der Planimetrie) $h = f$, also

$$M = \frac{2r\pi f}{2} = r\pi f.$$

Anm. 1. Ist z. B. $r = 3''$ und $f = 5''$, so ist (näherungsweise)

$$M = 3 \,.\, 5 \,.\, 3^1/_7 = 47^1/_7 \square''.$$

Anm. 2. Der Mantel des schiefen Kegels läßt sich, so wie der Mantel des schiefen Cylinders, nur mit Hilfe der höhern Mathematik berechnen.

Anm. 3. Nennt man gerade Kegel ähnlich, wenn sich ihre Höhen wie ihre Durchmesser verhalten, so wird man sich leicht von der Richtigkeit des folgenden Satzes überzeugen können:

Die Grundflächen, die Mäntel und folglich auch die ganzen Oberflächen ähnlicher gerader Kegel verhalten sich wie die Quadrate ihrer Höhen oder Durchmesser.

§ 105. Zusatz.

1) Der Mantel des geraden abgekürzten Kegels ist einem Trapeze gleich, welches zu den beiden parallelen Seiten die Peripherien der Grundflächen und zur Höhe die Seitenlinie des abgekürzten Kegels hat.

2) Sind daher r und ϱ die Radien der Grundflächen und ist f die Seitenlinie, so ist der Inhalt des Mantels:

$$M = (r + \varrho)\pi f.$$

Beweis. Die Behauptung (1) ist vermöge (1) im vorherg. § an sich klar; daraus folgt sogleich (2); denn nach § 219 der Planimetrie ist die Formel für den Inhalt des Trapezes

$$J = \frac{(a+b)}{2} . h,$$

wo a und b die beiden Parallelen und h die Höhe bezeichnet. Hier ist $J = M$, $a = 2r\pi$, $b = 2\varrho\pi$, $h = f$ zu setzen; dadurch verwandelt sich die vorstehende Formel in:

$$M = \frac{(2r\pi + 2\varrho\pi)f}{2} = \frac{2\pi(r+\varrho)f}{2} = \pi(r+\varrho)f.$$

Anm. Ist z. B. $r = 5''$, $\varrho = 3''$ und $f = 4''$ so ist (näherungsweise) $M = 8 . 4 . 3^1/_7 = 100^4/_7 \square''$.

C. Von der Kugel.

§ 106. Erklärung.

Ein Körper, dessen krumme Grenzfläche von einem innern Punkte überall gleich weit absteht, heißt eine Kugel. — Mittelpunkt — Radius — Durchmesser.

§ 107. Zusatz.

Ein Punkt liegt innerhalb oder außerhalb oder gerade auf der Kugelfläche, je nachdem sein Abstand vom Mittelpunkte kleiner, größer oder ebenso groß ist, als der Radius.

§ 108. Zusatz.

1) Eine Linie schneidet die Kugelfläche, berührt dieselbe oder trifft sie gar nicht, je nachdem ihr Abstand vom Mittelpunkte kleiner, als der Radius, oder eben so groß, oder größer ist.

2) Dasselbe gilt eben so von einer Ebene.

Der Beweis ist ganz der nehmliche, wie für die ähnlich lautenden Behauptungen über den Kreis in § 131 und 134 der Planimetrie.

§ 109. Lehrsatz.

Der Durchschnitt einer Ebene mit der Kugelfläche ist ein Kreis. — Geht die Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel, so ist dieser auch Mittelpunkt des Kreises; geht aber die Ebene des Durchschnitts nicht durch den Kugelmittelpunkt, so liegt der Mittelpunkt des Kreises in dem Fußpunkte des aus dem Mittelpunkte der Kugel auf die Durchschnittsebene gefällten Lothes.

Beweis. Wenn die Durchschnittsebene durch den Kugelmit-

telpunkt geht, fällt die Richtigkeit des Satzes in die Augen. — Im andern Falle sei M der Mittelpunkt der Kugel (Fig. 52), MC das Loth auf die Durchschnittsebene, A und B seien zwei beliebige Punkte des Durchschnitts und nach denselben die Radien MA und MB gezogen. Dann stimmen die rechtwinkeligen Dreiecke MCA und MCB in den Hypotenusen MA und MB und der gemeinschaftlichen Cathete MC überein, folglich ist auch die andere Cathete CA = CB. Eben so folgt, daß alle andern Punkte des Durchschnitts von C gleichen Abstand haben; der Durchschnitt ist folglich ein Kreis und C sein Mittelpunkt.

§ 110. Zusatz.

1) Die Linie, welche den Kugelmittelpunkt mit dem Mittelpunkt eines Kugelkreises (eines Kreises, dessen Peripherie in der Kugelfläche liegt) verbindet, steht senkrecht auf der Ebene des Kugelkreises.

2) Ein Loth auf der Ebene eines Kugelkreises in seinem Mittelpunkte errichtet, geht durch den Kugelmittelpunkt.

Beweis. Beide Behauptungen folgen leicht indirect aus dem vorhergeh. §.

§ 111. Zusatz.

1) Kreise, deren Mittelpunkte im Mittelpunkt der Kugel liegen, sind größer, als alle andern Kugelkreise und heißen größte oder Hauptkreise; die andern nennt man kleinere oder Nebenkreise.

2) Kugelkreise sind gleich, wenn ihre Ebenen gleich weit vom Mittelpunkte der Kugel abstehen; sie werden um so kleiner, je weiter sich ihre Ebenen vom Mittelpunkte der Kugel entfernen.

Die Beweise sind ganz dieselben, wie für die ähnlich lautenden Sätze über die Sehne in der Plan. (§ 125 und 127).

*§ 112. Lehrsatz.

Durch vier Punkte, welche nicht in einer Ebene liegen, läßt sich allemal eine und auch nur eine einzige Kugelfläche legen.

Beweis. Die gegebenen vier Punkte seien A, B, C, D (Fig. 53); — man lege durch A, B, C und durch B, C, D eine Ebene, beschreibe in der ersten einen Kreis durch die Punkte A, B, C und eben so in der zweiten durch B, C, D; hierauf halbire man die beiden gemeinschaftliche Sehne BC in E, verbinde diesen Punkt mit den Mittelpunkten F und G der beiden Kreise, lege durch F, E G eine Ebene und ziehe in derselben FH ⊥ EF und

GH $\perp$ EG; — dann ist der Durchschnittspunkt H dieser beiden Lothe der Mittelpunkt der gesuchten Kugel. —

Denn nach der Construction ist die Kante BC $\perp$ FE und EG, daher auch nach § 35 Ebene ABC und BCD $\perp$ HFEG; und da HF und HG in der senkrechten Ebene HFEG senkrecht auf die Kanten FE und EG gezogen sind, so sind sie auch (nach § 27) auf den Ebenen ABC und BCD senkrecht. Nun ist $\triangle$ AFH $\cong$ BFH $\cong$ CFH, (weil HF = HF = HF, AF = BF = CF, W. AFH = BFH = CFH ist), folglich ist auch HA = HB = HC. Eben so ist $\triangle$ BGH oder CGH $\cong$ DGH und daher HB oder HC = HD. Demnach geht eine mit einer der vier gleichen Linien HA, HB, HC oder HD aus dem Mittelpunkte H beschriebene Kugelfläche durch die vier Punkte A, B, C und D.

Eine zweite Kugelfläche läßt sich aber durch diese vier Punkte nicht legen, weil der Mittelpunkt derselben (vermöge § 110, 2) in jedem der beiden Lothe HF und HG, also in ihrem Durchschnittspunkte H liegen muß.

Anm. Ueber Kugeln, welche sich schneiden oder berühren, gelten im Wesentlichen dieselben Bestimmungen, wie von Kreisen in der Planimetrie (§ 148 — 152).

§ 113. Erklärung.

Der Kugeldurchmesser, welcher auf der Ebene eines Kugelkreises senkrecht steht, (und also vermöge § 109 durch den Mittelpunkt desselben geht,) heißt die Axe, und seine Endpunkte heißen die Pole des Kugelkreises.

§ 114. Zusatz.

1) Parallele Kugelkreise haben einerlei Axe und Pole.

2) Legt man durch die Pole paralleler Kugelkreise Hauptkreise, so schneiden diese von den Parallelkreisen ähnliche Bogen ab.

3) Die Bogen dieser Hauptkreise, welche zwischen einem Pole und einem Parallelkreise enthalten sind, sind gleich.

Beweis. 1) Der Durchmesser, welcher auf dem einen Parallelkreise senkrecht ist, ist auch auf allen andern senkrecht und daher die gemeinschaftliche Axe sämmtlicher Parallelkreise.

2) Die Centriwinkel ACB und DEF (Fig. 54) sind gleich, weil ihre Schenkel parallel laufen; es haben daher auch die Bogen AB und DF zu ihren Peripherien einerlei Verhältniß.

3) Da PC = PC, W. PCA = PCB, CA = CB ist, so ist $\triangle$ PCA $\cong$ PCB, folglich PA = PB, und da in congruenten Kreisen

zu gleichen Sehnen auch gleiche Bogen gehören, so ist auch Bogen PA = PB.

§ 115. **Erklärung.**

Dasjenige Stück der Kugeloberfläche (PBpAP, Fig. 54), welches zwischen den halben Peripherien (PBp und PAp) zweier Hauptkreise enthalten ist, heißt ein sphärisches Zweieck oder ein sphärischer Winkel.

Die Ebenen der beiden Kreise schließen auf der Seite des sphärischen Winkels einen Flächenwinkel (BPpA) ein, welcher der zum sphärischen Winkel gehörige Flächenwinkel, so wie sein Linienwinkel (BCA) der zugehörige Linienwinkel genannt wird.

Da sich sphärische Winkel offenbar wie ihre Linienwinkel verhalten, so unterscheidet man auch rechte, stumpfe, spitze sphärische Winkel u. dgl. und theilt den rechten sphärischen Winkel ebenfalls in 90 Grad u. s. f. — Es lassen sich daher in der Rechnung die Maaßzahlen der sphärischen Winkel allemal mit den Maaßzahlen der zugehörigen Flächenwinkel oder Linienwinkel vertauschen.

§ 116. **Erklärung.**

Ein Stück der Kugelfläche (ABC, Fig. 56), welches von drei oder mehr Bogen von Hauptkreisen begrenzt wird, heißt ein sphärisches Vieleck. Die begrenzenden Bogen werden die Seiten und die sphärischen Winkel, unter denen diese Bogen (auf der Seite, auf welcher das Vieleck liegt,) zusammenstoßen, die Winkel des Vielecks genannt.

Im Folgenden sollen nur solche Vielecke (vorzüglich Dreiecke) betrachtet werden, deren Seiten und Winkel kleiner, als 180° sind.

§ 117. **Zusatz.**

Die Ebenen der Bogen, welche ein sphärisches Dreieck begrenzen, schließen am Mittelpunkte der Kugel ein körperliches Dreieck ein, dessen Seiten und Winkel in der Anzahl ihrer Grade mit den Seiten und Winkeln des sphärischen Dreieckes genau übereinstimmen. Es gelten daher die oben von körperlichen Dreiecken erwiesenen Sätze, § 62 bis 81, ohne Ausnahme auch von sphärischen Dreiecken.

§ 118. **Zusatz.**

Der Bogen eines Hauptkreises, welcher zwei Punkte auf der Kugeloberfläche verbindet und kleiner, als die halbe Peripherie ist,

ist die kürzeste Linie, welche sich auf der Kugeloberfläche zwischen den beiden Punkten ziehen läßt.

Beweis. Denkt man sich zunächst die beiden Punkte durch eine gebrochene Linie verbunden, deren einzelne Stücke sämmtlich Bogen von Hauptkreisen sind, so folgt aus dem Satze, daß zwei Seiten eines Dreiecks zusammen größer sind, als die dritte, eben so wie in der Planimetrie (§ 118), daß die gebrochene Linie größer ist, als der gegebene Bogen. — Sind aber die beiden Punkte durch irgend eine andere zusammenhängende krumme Linie verbunden, so wird man diese allemal als aus unendlich vielen Bogen von Hauptkreisen zusammengesetzt ansehen können, und sie ist daher ebenfalls größer, als der Bogen des Hauptkreises, der jene beiden Punkte verbindet.

Anm. Ein Leser, dem der vorstehende Beweis, der allerdings nicht für ganz streng gelten kann, nicht genügen sollte, kann den Satz ohne alle Störung des Zusammenhanges überschlagen.

*§ 119. Lehrsatz.

Symmetrische sphärische Dreiecke haben gleichen Flächeninhalt.

Beweis 1. Es läßt sich kein Grund angeben, warum das eine größer sein sollte, als das andere.

Beweis 2. Die gegebenen Dreiecke seien ABC und abc (Fig. 55); — man bilde das zu ABC gehörige körperliche Dreieck am Mittelpunkte M und verlängere die Kanten desselben, bis sie die Oberfläche der Kugel zum zweiten Male in den Punkten α, β, γ treffen. Dann bestimmen diese drei Punkte ein neues sphärisches Dreieck $\alpha\beta\gamma$, welches dem Dreiecke abc congruent ist. Man denke sich ferner durch die drei Punkte A, B, C eine Ebene gelegt und in dieser durch die genannten drei Punkte eine Kreislinie gezogen. Sind nun P und π die Pole dieses Kugelkreises und wird P mit den Punkten A, B, C, π mit α, β, γ durch Bogen von Hauptkreisen verbunden, so sind zunächst (nach § 114, 3.) die Bogen PA, PB, PC einander gleich; ferner ist aber auch $PA = \pi\alpha$, $PB = \pi\beta$, $PC = \pi\gamma$, da die zugehörigen Centriwinkel bei M Scheitelwinkel sind. Demnach ist auch $\pi\alpha = \pi\beta = \pi\gamma$. Nun stimmen die beiden Dreiecke ABP und $\alpha\beta\pi$ in allen Seiten und Winkeln überein, — denn die zugehörigen körperlichen Dreiecke sind Scheiteldreiecke, — und da die Dreiecke ABP und $\alpha\beta\pi$ zugleich gleichschenkelig sind, so sind sie auch (nach § 74) congruent. — Aus denselben Gründen ist $\triangle$ ACP $\cong \alpha\gamma\pi$ und $\triangle$ BCP $\cong \beta\gamma\pi$, folglich auch $\triangle$ ABC $= \alpha\beta\gamma =$ abc.

In der Figur sind die Punkte P und π innerhalb der Dreiecke ABC und $\alpha\beta\gamma$ verzeichnet; man sieht indeß äußerst leicht, daß der Beweis sich nicht wesentlich ändert, wenn jene Punkte in eine Seite oder außerhalb der Dreiecke fallen. Im letztern Fall würde man von der Summe zweier gleichschenkeligen Dreiecke das dritte (oder dieses von jener Summe) subtrahiren.

*§ 120. Lehrsatz.

Jedes sphärische Dreieck verhält sich zur halben Kugeloberfläche, wie der Ueberschuß seiner Winkelsumme über 180° sich zu 360° verhält.

Beweis. Die Winkel des gegebenen Dreiecks ABC (Fig. 56) seien in Graden ausgedrückt durch $\alpha(=A)$, $\beta(=B)$, $\gamma(=C)$, die Fläche des Dreieckes selbst sei mit a und die halbe Kugelfläche mit O bezeichnet. Da sich nun ein sphärisches Zweieck zur halben Kugelfläche offenbar wie die Zahl seiner Grade zu 180 verhält, so ist

$$a+b:O = \beta:180$$

und

$$a+c:O = \alpha:180.$$

Ferner ist aber auch:

$$a+d:O = \gamma:180;$$

denn das Dreieck d ist seinem Scheiteldreieck gleich, und dieses bildet mit a ein sphärisches Zweieck, für welches γ die Zahl der Grade bezeichnet. — Aus den obigen Proportionen folgt:

$$a+b = \frac{\beta}{180}.O,$$

$$a+c = \frac{\alpha}{180}.O,$$

$$a+d = \frac{\gamma}{180}.O,$$

und hieraus durch Addition:

$$3a+b+c+d = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{180}.O,$$

oder da $a+b+c+d = O$ ist:

$$2a+O = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{180}.O,$$

also, wenn man beiderseits $O = \frac{180}{180}.O$ subtrahirt:

$$2a = \frac{\alpha+\beta+\gamma-180}{180}.O$$

und

$$a = \frac{\alpha+\beta+\gamma-180}{360}.O$$

oder

$$a:O = (\alpha+\beta+\gamma-180):360.$$

*§ 121. Zusatz.

Man sieht nun auch leicht ein, wie das Verhältniß der Fläche eines beliebigen sphärischen Vielecks zur halben Kugelfläche durch seine Winkelsumme bestimmt wird. Hat das Vieleck V, dessen Winkelsumme S sein mag, n Seiten, so läßt sich dasselbe durch Diagonalen aus einer Ecke nach den übrigen Ecken gezogen in n — 2 Dreiecke theilen. Diese seien A, B, C .... L und ihre Winkelsummen beziehlich α, β, γ ... λ. Dann ist nach dem vorhergeh. §

$$A = \frac{\alpha - 180}{360} . O,$$

$$B = \frac{\beta - 180}{360} . O,$$

$$C = \frac{\gamma - 180}{360} . O,$$

. . . .

. . . .

$$L = \frac{\lambda - 180}{360} . O,$$

folglich

$$(A + B + C ... + L) = \frac{(\alpha + \beta + \gamma ... + \lambda) - (n - 2) . 180}{360} . O,$$

oder da $A + B + C ... + L = V$ und $\alpha + \beta + \gamma ... + \lambda = S$ ist:

$$V = \frac{S - (n - 2) 180}{360} . O.$$

Bemerkung. Da die Kugel durch Umdrehung eines Halbkreises um seinen Durchmesser als Axe erzeugt und die Peripherie dieses Halbkreises als die Summe unendlich vieler unendlich kleiner Sehnen angesehen werden kann, so hat man, um zu einem Ausdruck für den Inhalt der Kugelfläche zu gelangen, vorher die von einer Sehne bei der angegebenen Umdrehung beschriebene krumme Fläche näher zu betrachten.

§ 122. Lehrsatz.

Wenn man einen Halbkreis um seinen Durchmesser als Axe herumdreht, so beschreibt eine in dem Halbkreise gezogene Sehne (AB in Fig. 57) im Allgemeinen den Mantel eines abgekürzten geraden Kegels; dieser Kegelmantel ist an Inhalt einem Cylindermantel gleich, der zur Höhe die Höhe des abgekürzten Kegels (DE) und zum Radius den Abstand der Sehne vom Mittelpunkte (CF) hat.

Beweis. Nach § 105 ist der von der Sehne AB beschriebene abgekürzte Kegelmantel

$$M = (AD + BE) . \pi . AB.$$

Wenn man nun AB in F halbirt und FG ∥ EB zieht, so ist (nach § 109 der Planimetrie) AD + BE = 2FG, also

$$M = 2FG . \pi . AB.$$

Verbindet man ferner noch F mit C und zieht FH ⊥ EB, so ist △ HFB ∼ GFC, weil W. FHB = FGC = 90° und W. HFB = GFC ist, indem beide den Winkel CFH zum Rechten ergänzen. Demnach verhält sich:

$$FB : FH = FC : FG,$$

oder da FB und FH die Hälften von AB und DE sind:

$$AB : DE = FC : FG,$$

woraus $AB . FG = DE . FC$

folgt. Hiernach verwandelt sich der obige Ausdruck für M in

$$M = 2DE . FC . \pi.$$

Dieser Ausdruck kann aber (nach § 101) für den Inhalt eines Cylindermantels mit der Höhe DE und dem Radius FC gelten.

Dieß findet auch dann noch statt, wenn ein Endpunkt der Sehne in den einen Endpunkt des Durchmessers fällt, oder wenn die Sehne dem Durchmesser parallel ist. Im ersten Falle beschreibt die Sehne einen vollständigen Kegelmantel; der vorhergehende Beweis kann aber ohne alle weitere Veränderung, als daß die Punkte A und D jetzt in einen zusammenfallen, beibehalten werden. Im letzten Fall wird durch die Bewegung der Sehne unmittelbar der angegebene Cylindermantel erzeugt.

§ 123. Lehrsatz.

Die Kugeloberfläche ist einem Cylindermantel gleich, welcher den Umfang der Kugel zum Umfange und den Durchmesser der Kugel zur Höhe hat.

Beweis. Theilt man die halbe Peripherie eines Hauptkreises in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, verbindet die auf einander folgenden Theilungspunkte (Fig. 58) und bezeichnet den Abstand der entstandenen Sehnen vom Mittelpunkte mit ϱ, so hat man für die von diesen Sehnen AB, BD, DE, EF und FG bei der Umdrehung um AG beschriebenen krummen Flächen nach der Reihe die Ausdrücke:

$$2Ab . \varrho\pi, \; 2bd . \varrho\pi, \; 2de . \varrho\pi, \; 2ef . \varrho\pi, \; 2fG . \varrho\pi$$

also für die Summe aller:

$$S = 2\varrho\pi(Ab + bd + de + ef + fG)$$

oder $$S = 2\varrho\pi . AG = 2\varrho\pi . 2r,$$

wenn man den Durchmesser der Kugel $AG = 2r$ setzt.

Nun wird man offenbar — dadurch, daß man die Peripherie des Halbkreises in mehr und mehr gleiche Theile theilt, — den Abstand ϱ der Sehne vom Mittelpunkte dem Radius r, die von den Sehnen gebildete gebrochene Linie der halben Peripherie und die Summe der krummen Flächen, welche die einzelnen Sehnen beschreiben, der Kugelfläche immer näher und beliebig nahe bringen können, und es wird folglich der Inhalt der Kugeloberfläche O erhalten werden, wenn man in dem obigen Ausdrucke für S an die Stelle von ϱ den Radius r setzt. Dann ergiebt sich

$$O = 2r\pi . 2r,$$

ein Ausdruck, welcher (nach § 101) für den Inhalt eines Cylindermantels gelten kann, der den Umfang der Kugel $2r\pi$ zum Umfange und den Durchmesser 2r zur Höhe hat.

§ 124. Zusatz.

Die Formel des vorhergeh. §:

$$O = 2r\pi . 2r = 4r^2\pi$$

läßt sich auch dahin aussprechen: die Kugeloberfläche ist viermal so groß, als ein Hauptkreis; — denn der Inhalt des Hauptkreises, der natürlich zum Radius r hat, ist bekanntlich $r^2\pi$ (§ 221 der Plan.). — Bei einer Halbkugel ist daher die krumme Fläche gerade das Doppelte von der ebenen.

Anm. Ist z. B. $r = 6''$ gegeben, so ist näherungsweise

$$O = 4 . 36 . 3\tfrac{1}{7} = 452\tfrac{1}{7} \square''.$$

§ 125. Erklärung.

Ein Stück der Kugelfläche, welches von der Peripherie eines Kugelkreises begrenzt wird, heißt eine Calotte (Haube), und ein Stück der Kugelfläche, welches zwischen zwei parallelen Kugelkreisen liegt, heißt eine Zone (Gürtel).

§ 126. Zusatz.

Die Calotte oder Zone ist einem Cylindermantel gleich, welcher den Umfang der Kugel zum Umfange und die Höhe der Calotte oder Zone zur Höhe hat.

Der Beweis ist dem von § 123 ganz ähnlich. Man wird sich nehmlich den Bogen, durch dessen Umdrehung die Calotte oder Zone beschrieben werden kann, in eine beliebige Anzahl gleicher

Theile getheilt und die auf einander folgenden Theilungspunkte durch Sehnen verbunden denken u. s. f.

§ 127. Zusatz.

Ist r der Radius der Kugel, h die Höhe der Calotte oder Zone, so ist ihr Flächeninhalt

$$= 2r\pi \,.\, h.$$

Beweis. Denn $2r\pi$ ist der Umfang und h die Höhe des der Calotte oder Zone gleichen Cylindermantels.

Anm. Auch die folgende Beziehung ist merkenswerth. Die von dem Bogen AB (Fig. 58) beschriebene Calotte ist nach dem vorherg. § $= AG \,.\, \pi \; Ab = AG \,.\, Ab \,.\, \pi = AB^2 \,.\, \pi$, d. h. die Calotte ist einem Kreise gleich, welcher die Sehne AB zum Radius hat. So ist insbesondere die halbe Kugelfläche einem Kreise gleich, der zum Radius die Sehne eines Bogens von 90^0 hat, und die ganze Kugelfläche einem Kreise gleich, der den Kugeldurchmesser zum Radius hat.

Sechster Abschnitt.

Von der Ausmessung der eckigen und runden Körper.

A. Prisma und Cylinder.

§ 128. Erklärung.

Zwei Körper heißen congruent, wenn sie sich zusammen legen lassen, daß ihre Ganzen sich decken.

Zwei Körper werden gleich genannt, wenn sie sich in die nehmlichen congruenten Stücke zerschneiden lassen, also auch, wenn in beiden der nehmliche dritte Körper gleich vielmal enthalten ist.

Bemerkung. Wenn wir die Sätze über die Congruenz der Körper, ins Besondere der Pyramiden und Prismen, gänzlich übergehn, so geschieht dieß deshalb, weil diese Sätze eine weit geringere Anwendung finden und überdieß größere Schwierigkeiten darbieten, als die analogen Sätze der Planimetrie über die Congruenz der Dreiecke, Vierecke u. s. w.

Wir sind in der Planimetrie bei der Vergleichung der Figuren in Hinsicht der Größe vom Parallelogramme ausgegangen und

haben zuerst zwei Parallelogramme, mit gleicher Höhe und gleicher Grundlinie oder, da gleiche Linien auch congruent sind, mit gleicher Höhe und congruenter Grundlinie mit einander verglichen. Wir beginnen dem gemäß in der Stereometrie die Vergleichung der Körper in Hinsicht ihrer Größe mit dem folgenden Satze, bei welchem sich indeß eine größere Mannigfaltigkeit der verschiedenen Fälle, als bei dem analogen Satze der Planimetrie deshalb herausstellt, weil in der Stereometrie, nicht wie dort bloß zwei Dimensionen, sondern alle drei Dimensionen des Raumes zugleich zu berücksichtigen sind.

§ 129. Lehrsatz.

Parallelepipeda mit congruenter Grundfläche und gleicher Höhe sind gleich.

Beweis. Man lege die gegebenen Parallelepipeda so zusammen, daß ihre congruenten Grundflächen sich decken; dann werden auch die gegenüberliegenden Grundflächen nach § 34 in eine Ebene fallen. — Nun sind zwei Fälle möglich: entweder diese beiden Grundflächen EFGH und KLMN liegen zwischen den nehmlichen Parallelen EL und HM, wie dieses z. B. bei den Parallelepipeden ABCDEFGH und ABCDKLMN (Fig. 59) der Fall ist, oder diese Bedingung ist nicht erfüllt (Fig. 60).

Im ersten Falle (Fig. 59) entstehen zwei dreiseitige Prismen AEKDHN und BFLCGM, welche congruent sind. Denn wenn man diese beiden Körper so zusammenlegt, daß die Seitenfläche BCGF auf die ihr congruente Seitenfläche ADHE *) fällt, so wird das Dreieck BFL das congruente Dreieck AEK und das Dreieck CGM das congruente Dreieck DHN decken, weil diese Dreiecke gegen die auf einander gelegten Flächen BCGF und ADHE an der nehmlichen Seite dieselbe Neigung haben. Es fällt daher auch die Seitenfläche BCML auf ADNK und FLMG auf EKNH; folglich sind die dreiseitigen Prismen AEKDHN und BFLCGM congruent. — Subtrahiren wir nun zunächst das dreiseitige Prisma BFLCGM von dem ganzen vierseitigen Prisma ABLEDCMH, so bleibt das Parallelepipedum ABCDEFGH übrig, und wenn wir von demselben vierseitigen Prisma das dreiseitige Prisma AEKDHN wegnehmen, so bleibt das Parallelepipedum ABCDKLMN übrig. Demnach ist Parallelepipedum ABCDEFGH = ABCDKLMN.

---

*) Die gegenüberstehenden Seitenflächen eines Parallelepipedums ABCDEFGH sind nach § 89 congruent.

Wenn aber zweitens in den Parallelepipeden ABCDEFGH und ABCDKLMN (Fig. 60), welche die gemeinschaftliche Grundfläche ABCD und eine gleiche Höhe haben, die obern Grundflächen EFGH und KLMN nicht zwischen denselben Parallelen liegen, so läßt sich durch Erweiterung der Seitenflächen ein neues Parallelepipedum ABCDOPQR bilden, welches mit jedem der gegebenen nach Nr. 1 sich vergleichen läßt. Man erhält dieses Parallelepipedum, wenn man in dem einen gegebenen Parallelepipedum ABCDEFG die Seitenflächen ADHE und BCGF, welche durch ein Paar gegenüberstehende Grundkanten AD und BC gehen, und in dem andern gegebenen Parallelepipedum ABCDKLMN die Seitenflächen ABLK und DCMN, welche durch das andere Paar Grundkanten AB und CD gehen, bis zum Zusammentreffen erweitert. Das so entstandene Parallelepipedum ABCDOPQR ist zu Folge des in Nr. 1 geführten Beweises dem gegebenen Parallelepipedum ABCDEFGH gleich, da es mit demselben eine gemeinschaftliche Grundfläche ABCD und gleiche Höhe hat und die beiden obern Grundflächen EFGH und OPQR zwischen den nehmlichen Parallelen HO und GP liegen. Eben so ist das Parallelepipedum ABCDOPQR dem gegebenen Parallelepipedum ABCDKLMN nach Nr. 1 gleich, da es mit demselben eine gemeinschaftliche Grundfläche ABCD und gleiche Höhe hat und die beiden obern Grundflächen KLMN und OPQR zwischen denselben Parallelen LO und MR liegen. Da nun hiernach das Parallelepipedum ABCDOPQR jedem der gegebenen gleich ist, so müssen diese auch unter sich gleich sein. Folglich ist Parallelepipedum ABCDEFGH = ABCDKLMN, w. z. e. w.

Bemerkung. So wie sich in der Planimetrie aus der Vergleichung der Parallelogramme auch die der Dreiecke mit Hilfe des Satzes ergeben hat, daß das Parallelogramm durch die Diagonale halbirt wird, so bedürfen wir in der Stereometrie, um von dem Parallelepipedum zum Prisma und zwar zunächst zum dreiseitigen überzugehen, des folgenden Satzes.

§ 130. Lehrsatz.

Das Parallelepipedum wird durch die Diagonalebene halbirt.

Beweis. Ist erstens ein gerades Parallelepipedum ABCD EFGH (Fig. 61) gegeben, so sind die beiden dreiseitigen Prismen ABCEFG und CDAGHE, in welche das Parallelepipedum durch die Diagonalebene AEGC zerschnitten wird, offenbar congruent.

Wenn aber zweitens das gegebene Parallelepipedum ABCD

EFGH (Fig. 62) schief ist, so stimmen zwar die beiden Prismen ABCEFG und CDAGHE in den Seitenflächen und Grundflächen, so wie auch in den Neigungswinkeln derselben gegen einander überein; dennoch würde man sich vergeblich bemühen, dieselben zum Decken zu bringen.*) Um nun zu zeigen, daß sie eine gleiche Größe haben, verwandeln wir dieselben in gleichgroße gerade Prismen, indem wir in einer Seitenkante AE einen beliebigen Punkt K annehmen und durch diesen eine senkrechte Ebene legen, welche die Seitenflächen des gegebenen Parallelepipedums ABCDEFGH in dem Parallelogramme KLMN durchschneidet, hierauf AE so weit verlängern, bis KO = AE wird, und durch O ebenfalls eine senkrechte Ebene legen, welche die erweiterten Seitenflächen in dem Parallelogramme OPQR durchschneidet. Durch diese Construction entsteht ein gerades Parallelepipedum KLMNOPQR und zwei gerade Prismen KLMOPQ und MNKQRO.

Nun ist zunächst das schiefe Prisma ABCEFG gleich dem geraden KLMOPQ. Denn sie haben das Stück KLMEFG gemeinschaftlich, und die nicht gemeinschaftlichen Stücke ABCKLM und EFGOPQ sind congruent. Da nehmlich AE = KO gemacht und deshalb auch BF = LP und CG = MQ ist, so muß offenbar auch AK = EO, BL = FP und CM = GQ sein. Legen wir nun den Körper EFGOPQ so auf ABCKLM, daß die beiden Grundflächen OPQ und KLM, welche nach § 85 congruent sind, sich decken, so fällt auch die Seitenkante EO auf AK, FP auf BL und GQ auf CM, weil diese Linien auf den zusammengelegten Grundflächen nach der Construction senkrecht stehen, und da diese Linien überdieß eine gleiche Länge haben, so fällt auch der Endpunkt E auf A, F auf B und G auf C, also auch die Grundfläche EFG auf ABC. Demnach ist der Körper ABCKLM $\cong$ EFGOPQ. Addiren wir nun zu beiden den Körper KLMEFG, so ergiebt sich das schiefe Prisma ABCEFG gleich dem geraden KLMOPQ.

Eben so finden wir, daß das schiefe Prisma CDAGHE gleich dem geraden Prisma MNKQRO ist.

Nun wird aber nach Nr. 1 das gerade Parallelepipedum KLMNOPQR durch die Diagonalebene KOQM halbirt; also ist das gerade Prisma KLMOPQ gleich dem geraden Prisma MNKQRO,

*) Den besondern Fall ausgenommen, daß die Kanten AB und BC und die an denselben liegenden Flächenwinkel gleich sind.

und folglich ist auch das schiefe Prisma ABCEFG gleich dem schiefen Prisma CDAGHE.

Anm. Dergleichen Körper, wie die eben genannten schiefen Prismen, welche von lauter congruenten und gegen einander gleich geneigten Grenzflächen eingeschlossen werden, und dennoch selbst nicht congruent sind, heißen symmetrische Körper. (Vergl. § 64.)

§ 131. Lehrsatz.

Prismen mit congruenter Grundfläche und gleicher Höhe sind gleich.

Beweis. Es seien zuerst zwei dreiseitige Prismen ABCDEF und GHKLMN (Fig. 63) gegeben; man lege durch zwei Seitenkanten AD und CF des erstern und durch die gleichliegenden Seitenkanten GL und KN des andern Ebenen, welche den gegenüberstehenden Seitenflächen parallel sind, so entstehen die beiden Parallelepipeda ABCODEFP und GHKQLMNR, welche nach § 129 einander gleich sind, weil sie gleiche Höhe und congruente Grundfläche haben. Da nun die Parallelepipeda nach § 130 durch die Diagonalebene ADFC und GLNK halbirt sind, so ist folglich auch Prisma ABCDEF = GHKLMN.

Wenn aber zweitens zwei mehrseitige Prismen gegeben sind, so lassen sich dieselben in dreiseitige Prismen mit gleicher Höhe und congruenter Grundfläche zerschneiden, welche nach Nr. 1 einander gleich sind; folglich müssen auch die gegebenen mehrseitigen Prismen einander gleich sein.

§ 132. Lehrsatz.

Prismen mit gleicher Höhe und gleicher Grundfläche sind gleich.

Beweis. Wenn zwei ebene Figuren einander gleich sind, so müssen sich dieselben in congruente Stücke zerschneiden lassen. Legt man nun durch die Theilungslinien Ebenen mit den Seitenkanten parallel, so werden die gegebenen Prismen selbst in kleinere Prismen zerschnitten, welche gleiche Höhe und congruente Grundfläche haben und folglich nach dem vorherg. § gleich sind. Folglich müssen auch die gegebenen Prismen selbst einander gleich sein.

Anm. Der vorstehende Beweis könnte vielleicht beim ersten Anblicke als nicht ganz gründlich geführt erscheinen, da man sich allerdings zwei Figuren denken kann, welche einander gleich sind, ohne daß es möglich ist, dieselben wirklich in congruente Stücke zu zerschneiden. Allein wenn wir uns fragen, was wir eigentlich unter gleichen Figuren

verstehen, so werden wir hierauf keine andere, als die zweifache Antwort geben können, entweder: solche, in welchen ein und dieselbe Figur gleich vielmal enthalten ist, oder: solche, welche sich in die nehmlichen congruenten Stücke zerschneiden lassen, — wo die letztere Antwort die erstere, als einen besondern Fall, mit in sich schließt. Wenn wir daher zwei Figuren als gleich annehmen, so denken wir uns dieselben als aus congruenten Stücken bestehend, wonach der obige Beweis, was die Gründlichkeit anlangt, als vollkommen gerechtfertigt erscheint.

Das Nehmliche geht auch aus der folgenden Ueberlegung hervor: — Da wir in der Mathematik nur nach Gründen schließen, welche in schon früher als richtig erkannten Wahrheiten enthalten sind, so muß es möglich sein, die Gleichheit der Grundflächen zweier Prismen aus den in diesem Lehrbuche enthaltenen Sätzen der Planimetrie zu erweisen; entgegengesetzten Falles könnte diese Gleichheit wenigstens für uns hier, indem wir die Stereometrie nach diesem Lehrbuche behandeln, keine Gültigkeit haben. Nun sind aber sämmtliche Sätze über die Gleichheit der ebenen Figuren in der Art erwiesen, daß, wenn wir bis auf die letzten Gründe zurückgehen, aus denen die Gleichheit folgte, die zu vergleichenden Figuren entweder wirklich in congruente Stücke zerschnitten wurden oder sich als Summen oder Differenzen congruenter Figuren ergaben. — Denken wir uns nun durch die für diese Beweise erforderlichen Hilfslinien Ebenen parallel mit den Seitenkanten derjenigen Prismen gelegt, welche jene Figuren zu Grundflächen haben, so werden dieselben Gründe, welche uns von der Gleichheit der Grundflächen überzeugt haben, sich auch auf die durch diese Construction entstandenen Prismen vermöge § 131 übertragen lassen, woraus denn mit Nothwendigkeit folgt, daß Prismen mit gleichen Höhen und gleichen Grundflächen einander gleich sind.

§ 133. Lehrsatz.

Prismen mit gleicher Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen.

Beweis. Da nach § 132 schiefe Prismen sich durch gerade Prismen mit gleicher Höhe und Grundfläche ersetzen lassen, so wollen wir um größerer Einfachheit der Figur Willen zwei gerade Prismen P und Q (Fig. 64) als gegebene annehmen. In diesen sei also $ABC = EFGH$, und es verhalte sich

$$AD : EK = 3 : 5.$$

Theilt man nun AD in drei und EK in fünf gleiche Theile und legt durch die Theilungspunkte Ebenen den Grundflächen parallel, so wird das Prisma P in drei und Q in fünf Theile getheilt, welche (nach § 132) alle einander gleich sind. Demnach verhält sich auch $P : Q = 3 : 5 = AD : EK.$

Anm. Vergl. die Anm. zu § 49.

Bemerkung. Da nach § 132 Prismen mit gleicher Höhe

und Grundfläche gleich sind und jede geradlinige Figur (nach der Planimetrie) sich in ein Rechteck verwandeln läßt, so kann jedes Prisma in ein rechtwinkliges Parallelepipedum verwandelt werden. Wir werden daher zur Ausmessung der Prismen überhaupt gelangen, wenn wir im Stande sind, das rechtwinklige Parallelepipedum auszumessen.

§ 134. Erklärung.

Wenn man einen Körper durch einen andern, als Einheit angenommenen Körper gemessen hat, und dann den auszumessenden Körper (seiner Größe nach) als benannte Zahl ausdrückt, so heißt diese benannte Zahl der Inhalt des Körpers. — Als Einheit wird gewöhnlich ein Würfel angenommen.

Wenn im Folgenden aus den Maaßzahlen gewisser gegebenen Linien oder Flächen der Inhalt eines Körpers berechnet werden soll, so ist allemal vorausgesetzt, daß die Linien durch die Kante des Würfels als Längeneinheit und die Flächen durch die Seitenfläche des Würfels als Flächeneinheit gemessen sind, und daß sich also die gegebenen Maaßzahlen auf diese Einheiten beziehen.

Anm. Zu den am häufigsten Anwendung findenden Körpermaaßen gehören folgende:

1 Kubikfuß = 1728 Kubikzoll.
1 Kubikzoll = 1728 Kubiklinien.
1 Kubikklafter = 108 Kubikfuß, (ein Körper von 6′ Höhe, 6′ Länge und 3′ Breite).
1 Schachtruthe = 144 Kubikfuß, (ein Körper von 12′ Länge, 12′ Breite und 1′ Höhe).
1 Scheffel = $^{16}/_{9}$ Kubikfuß = 3072 Kubikzoll.
1 Metze = $^{1}/_{16}$ Scheffel = $^{1}/_{9}$ Kubikfuß = 192 Kubikzoll.
1 Quart oder Kanne = $^{1}/_{3}$ Metze = $^{1}/_{27}$ Kubikfuß = 64 Kubikzoll (= einem Würfel von 4 Zoll Höhe).

§ 135. Lehrsatz.

Die Zahl für den Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums wird gefunden, wenn man die Maaßzahlen dreier in einen Punkt zusammenstoßenden Kanten — (Länge, Breite und Höhe) — in einander multiplicirt.

Beweis. Das auszumessende Parallelepipedum sei P (Fig. 65), der als Einheit angenommene Würfel W; die Maaßzahlen dreier zusammenstoßenden Kanten des Parallelepipedums AB, AC, AD seien beziehlich a, b, c; man mache AF = AG = AH = der Seite des Würfels und lege durch F eine der Grundfläche CD,

durch G eine der Seitenfläche BD und durch H eine der Seitenfläche BC parallele Ebene; dann entstehen drei neue Parallelepipeda AL, AM und AN. — Nun haben die Parallelepipeda AE und AL dieselbe Grundfläche ADOC; sie verhalten sich daher (vermöge § 133) wie ihre Höhen; also ist

$$1)\quad AE : AL = AB : AF = a : 1.$$

Die Parallelepipeda AL und AM haben ebenfalls eine Fläche ADQF gemeinschaftlich, und wenn man diese als Grundfläche annimmt, sind die zugehörigen Höhen AC und AG; es verhält sich folglich

$$2)\quad AL : AM = AC : AG = b : 1.$$

Endlich kann man AGRF als gemeinschaftliche Grundfläche der Parallelepipeda AM und AN und AD und AH als die zugehörigen Höhen ansehen; dann erhält man die Proportion

$$3)\quad AM : AN = AD : AH = c : 1.$$

Aus den drei vorhergehenden Gleichungen folgt nach der Reihe:

$$1)\quad AE = a \,.\, AL,$$
$$2)\quad AL = b \,.\, AM,$$
$$3)\quad AM = c \,.\, AN,$$

woraus offenbar $AE = a \,.\, b \,.\, c \,.\, AN$

hervorgeht, oder was dasselbe ist:

$$P = a \,.\, b \,.\, c \,.\, W,$$

d. h. der Würfel ist in dem Parallelepipedum a . b . cmal enthalten, und wenn man die Zahl für den Inhalt des Parallelepipedums mit J bezeichnet, so ist folglich

$$J = a \,.\, b \,.\, c.$$

Anm. Ist $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$, so ist:

$$AE = 5AL,$$
$$AL = 3AM,$$

und $AM = 4AN,$

folglich $AE = 5 \,.\, 3 \,.\, 4AN = 60AN,$

also ist die Zahl des Inhalts $J = 60.$

Bemerkung. Den vorhergehenden Satz spricht man gewöhnlich kurz so aus: „Der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums ist gleich dem Product dreier zusammenstoßenden Kanten." — Aehnlicher Abkürzungen wird man sich auch in den folgenden Sätzen bedienen.

§ 136. Zusatz.

Der Inhalt eines Würfels, welcher die Kante a hat, ist

$$J = a \,.\, a \,.\, a = a^3.$$

Anm. Diese Beziehung ist Veranlassung geworden, eine jede dritte

Potenz einen Kubus zu nennen. Es drückt nehmlich, wie man so eben gesehen hat, die dritte Potenz einer Zahl den Inhalt eines Würfels aus, dessen Seite die gegebene Zahl zur Maaßzahl hat.

§ 137. **Zusatz.**

1) Nach § 135 ist der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums $J = a.b.c = a.(b.c)$, und da $b.c$ offenbar den Inhalt der Grundfläche ausdrückt, so kann man auch jenen Satz dahin aussprechen: der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums ist gleich dem Producte aus Höhe und Grundfläche. — Hieraus folgt:

2) Der Inhalt eines jeden Prisma's ist gleich dem Producte aus Höhe und Grundfläche.

Denn jedes Prisma ist (nach § 132) einem rechtwinkligen Parallelepipedum gleich, das mit ihm gleiche Höhe und Grundfläche hat, und für das rechtwinklige Parallelepipedum ist der Satz so eben erwiesen.

Anm. Ist z. B. von einem Prisma der Inhalt der Grundfläche $= 145 \square'$ und die Höhe $= 9'$ gegeben, so ist der körperliche Inhalt des Prisma's $= 9.145 = 1305$ Kubikfuß.

§ 138. **Zusatz.**

Aus dem vorhergeh. § folgt:

1) Zwei Prismen sind gleich, wenn bei ihnen die Producte aus Höhe und Grundfläche gleich sind, oder, was dasselbe sagen will, wenn sich die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen verhalten.

2) Zwei Prismen verhalten sich zu einander wie die Producte aus Höhe und Grundfläche.

§ 139. **Lehrsatz.**

Der Inhalt eines Cylinders ist dem Producte aus Höhe und Grundfläche gleich.

Beweis. Der Cylinder kann als ein Prisma von unendlich vielen Seiten angesehen werden; und von Prismen gilt der Satz nach § 137.

§ 140. **Aufgabe.**

Aus der Höhe h und dem Radius r der Grundfläche den Inhalt J des Cylinders zu berechnen.

Aufl. Der Inhalt der Grundfläche ist (nach § 221 der Planimetrie) $= r^2\pi$; multiplicirt man diesen Ausdruck mit der Höhe h, so ergiebt sich der gesuchte Inhalt

$$J = r^2\pi h.$$

Anm. Wenn z. B. $r = 3'$, $h = 5'$ gegeben ist und wir statt π

den Näherungswerth $3\frac{1}{7}$ setzen, so ist

$$J = 9 . 5 . 3\tfrac{1}{7} = 141\tfrac{3}{7} \text{ (Kubikfuß).}$$

B. Pyramide und Kegel.

*§ 141. Lehrsatz.

Die abgekürzte Pyramide ist kleiner als ein Prisma, das mit ihr gleiche Höhe und die größere ihrer Grundflächen zur Grundfläche hat, und größer als ein Prisma, das dieselbe Höhe und die kleinere Grundfläche hat.

Beweis. Die abgekürzte Pyramide sei ABCDEF (Fig. 66); — zieht man in den Ebenen der Seitenflächen BADC und BCFE die Linien DG und FH ∥ BE und legt durch diese Parallelen eine Ebene, welche die erweiterte obere Grundfläche in GH schneidet, so ist offenbar die abgekürzte Pyramide ein Theil des entstandenen Prisma's GHBDFE. Wenn man dagegen AL und CM ∥ BE zieht und durch diese Parallelen eine Ebene legt, so ist das Prisma ABCLEM nur ein Theil der abgekürzten Pyramide ABCDEF.

In der Figur ist eine dreiseitige Pyramide dargestellt; der Satz läßt sich aber auf ähnliche Art auch für mehrseitige Pyramiden darthun; er folgt indeß auch aus dem so eben von der dreiseitigen Pyramide Erwiesenen, da sich mehrseitige Pyramiden und Prismen durch Diagonalebenen in dreiseitige zerschneiden lassen.

§ 142. Lehrsatz.

Pyramiden mit gleicher Höhe und Grundfläche sind gleich.

Beweis 1. Wenn man beide Pyramiden (Fig. 67) in einem gleichen Abstande von der Spitze, der mit k bezeichnet sein mag, durchschneidet, so sind die Durchschnitte gleich. Denn nach § 93 verhalten sich die Durchschnitte, die c und c′ heißen mögen, zu den Grundflächen g und g′ der ganzen Pyramiden, wie die Quadrate der Abstände von der Spitze; also wenn die gleichen Höhen der ganzen Pyramiden mit h bezeichnet sind:

$$c : g = k^2 : h^2$$

und

$$c' : g' = k^2 : h^2,$$

folglich

$$c : g = c' : g'.$$

Da aber nach der Annahme $g = g'$ ist, so muß auch $c = c'$ sein. — Da nun beide Pyramiden gleiche Höhe haben, und jedesmal gleiche Durchschnitte entstehen, wo man auch immer die Pyramiden — in gleichem Abstande von der Spitze — durchschneiden mag,

so können offenbar die Pyramiden in ihrem Inhalte nicht von einander verschieden sein. *)

* Beweis 2. Wenn man die gleichen Höhen der gegebenen Pyramiden in eine beliebige Anzahl, hier z. B. in sieben gleiche Theile theilt und durch die Theilungspunkte Ebenen den Grundflächen parallel legt, so haben die entstandenen Durchschnitte nach dem Obigen in beiden Pyramiden dieselbe Größe und mögen dem zufolge mit einerlei Buchstaben a, b, c, d, e, f und die Grundflächen selbst mit g bezeichnet sein. Ueber diesen Durchschnitten als Grundflächen denke man sich Prismen errichtet, welche sämmtlich $\frac{1}{7}$h zur Höhe haben. Diese Prismen seien nach der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta$.

Nun ist nach dem vorhergeh. § in beiden gegebenen Pyramiden

die oberste abgeschnittene kleine Pyramide $< \alpha$,
= zweite = (abgekürzte) Pyramide $< \beta$,
= dritte = = = $< \gamma$,
. . . .
. . . .
die siebente abgeschnittene (abgekürzte) Pyramide $< \eta$.

Demnach ist offenbar sowohl die eine wie die andere ganze Pyramide $< \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta$.

Dagegen ist ebenfalls nach dem vorhergeh. §

die zweite abgeschnittene (abgekürzte) Pyramide $> \alpha$,
= dritte = = = $> \beta$,
. . . .
. . . .
die siebente abgeschnittene (abgekürzte) Pyramide $> \zeta$,

folglich sind um so mehr die ganzen Pyramiden, (da noch bei jeder die oberste kleine Pyramide hinzu kommt):

$$> \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta.$$

Hiernach sind beide Pyramiden zwischen zwei Grenzen

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta$$

und

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta$$

enthalten, welche sich um η von einander unterscheiden, und es

---

*) Dieser Beweis ist zwar nicht ganz streng, aber vollkommen überzeugend. Denn Niemand wird überhaupt an der Gleichheit zweier Körper zweifeln, wenn sie in irgend einer Richtung gleiche Höhe haben und in gleichen Abständen von den Enden dieser Höhen durchschnitten immer gleiche Durchschnitte liefern.

müssen folglich die Pyramiden selbst, da sie zwischen jenen Grenzen liegen, um weniger als η von einander verschieden sein. Das Prisma η hat die Grundfläche g und die Höhe $\frac{1}{7}$h, also den Inhalt $\frac{1}{7}$gh. Bezeichnet man nun die eine Pyramide mit P und die andere mit P', so ist folglich (abgesehen vom Vorzeichen)

$$P - P' < \tfrac{1}{7}gh.$$

Hätte man die Höhen der Pyramiden nicht gerade in 7, sondern überhaupt in n gleiche Theile getheilt, so würde man — auf ganz gleiche Weise, wie im Vorhergehenden — offenbar

$$P - P' < \tfrac{1}{n}gh$$

gefunden haben. Nun kann aber n jede beliebige (ganze) Zahl bezeichnen, und man wird folglich n immer so groß annehmen können, daß das Product $\frac{1}{n}$gh kleiner wird, als jede irgend gegebene noch so kleine Zahl; um so mehr muß folglich die Differenz P P' kleiner sein, als jede noch so kleine Zahl; kleiner als alle andern Zahlen ist (abgesehen vom Vorzeichen) allein Null; also muß

$$P - P' = 0,$$

d. h.

$$P = P' \text{ sein.}$$

§ 143. Lehrsatz.

Jedes Prisma ist das Dreifache einer Pyramide, die mit ihm gleiche Höhe und Grundfläche hat.

Beweis. Es sei zunächst ein dreiseitiges Prisma ABCDEF (Fig. 68) gegeben; — man zerschneide dasselbe zuerst durch die Ebene BDF in die dreiseitige Pyramide BDEF und die vierseitige Pyramide BADFC (Spitze B, Grundfläche ADFC) und zertheile dann diese Pyramide noch durch die Ebene BDC in zwei dreiseitige Pyramiden BADC und BDFC. Die so eben genannten Pyramiden sind offenbar gleich, da sie gleiche Grundflächen ADC und DFC und gleiche Höhe haben, indem ihre Grundflächen in derselben Ebene ADFC und ihre Spitzen in demselben Punkte B liegen. Ferner ist auch die Pyramide BADC = BDEF, da sie gleiche Grundflächen ABC und DEF und gleiche Höhe, nehmlich einerlei Höhe mit dem Prisma haben. Da nun alle drei Pyramiden gleich sind, so ist das Prisma das Dreifache von jeder, also z. B. dreimal so groß, als die Pyramide BDEF, welche mit dem Prisma einerlei Höhe und Grundfläche hat.

Das so eben von einem dreiseitigen Prisma und einer dreiseitigen Pyramide Erwiesene gilt aber auch von mehrseitigen — einmal, weil man für mehrseitige Prismen und Pyramiden (nach

§ 132 und § 142) dreiseitige setzen kann, die mit ihnen gleiche Höhe und Grundfläche haben; — ferner auch deshalb, weil sich mehrseitige Prismen und Pyramiden allemal durch Diagonalebenen in dreiseitige zerschneiden lassen.

§ 144. Zusatz.

1) Da die Pyramide der dritte Theil eines Prisma's ist, das mit ihr gleiche Höhe und Grundfläche hat, so ist ihr Inhalt gleich dem dritten Theile des Productes aus Höhe und Grundfläche.

2) Von Pyramiden gelten daher auch die in § 138 von Prismen aufgestellten Behauptungen.

Anm. Ist z. B. die Grundfläche einer Pyramide ein Rechteck und die Länge dieses Rechtecks = 6', die Breite = 4' und die Höhe der Pyramide = 5' gegeben, so ist ihr körperlicher Inhalt

$$J = \frac{1}{3} . 6 . 4 . 5 = 40 \text{ (Kubikfuß)}.$$

§ 145. Lehrsatz.

Der Inhalt eines Kegels ist gleich dem dritten Theile des Products aus Höhe und Grundfläche.

Beweis. Denn der Kegel ist als eine Pyramide von unendlich vielen Seiten anzusehen.

§ 146. Aufgabe.

Aus der Höhe h und dem Radius r der Grundfläche eines Kegels den Inhalt J zu berechnen.

Aufl. Der Inhalt der Grundfläche ist $= r^2\pi$, also wenn man mit $\frac{1}{3}h$ multiplicirt, der Inhalt des Kegels

$$J = \frac{1}{3} r^2 \pi h.$$

Anm. Ist z. B. $r = 5''$ und $h = 8''$ gegeben, so ist näherungsweise $J = \frac{1}{3} . 25 . 8 . 3\frac{1}{7} = 209\frac{11}{21}$ (Kubikzoll).

C. Obelisk und abgekürzter Kegel.

§ 147. Lehrsatz.

Jeder Obelisk ist gleich der Summe aus einem Prisma und einer Pyramide, welche beide mit dem Obelisken gleiche Höhe haben, und von denen das Prisma die mittlere Durchschnittsfigur, die Pyramide aber die Ergänzungsfigur zur Grundfläche hat.

Beweis. 1) Es sei zunächst ein dreiseitiger Obelisk ABC A'B'C' (Fig. 69) gegeben; — man konstruire die mittlere Durchschnittsfigur $\alpha\beta\gamma$ (§ 97), ziehe durch die Mitte α einer Seitenkante AA' mit den beiden andern Seitenkanten BB' und CC' die

Parallelen DD' und EE' und lege durch dieselben eine Ebene, welche die untere Grundfläche in DE und die erweiterte obere Grundfläche in D'E' schneidet, wodurch die Dreiecke ADE und A'D'E' entstehen, welche nach § 97 der Ergänzungsfigur des Obelisken gleich sind; — endlich ziehe man noch durch die Mitte einer andern Seitenkante, z. B. durch β, eine Parallele FF' zur dritten Seitenkante CC' *) und lege durch FF' und die ihr Parallele EE' eine Ebene, welche die untere Grundfläche in EF und die erweiterte obere Grundfläche in E'F' durchschneidet. — Das durch diese Construction entstandene Prisma CEFC'E'F' hat mit dem gegebenen Obelisken ABCA'B'C' den kleinern Obelisken A'B'C'$\alpha\beta\gamma$ und das kleinere Prisma $\alpha\beta\gamma$EFC gemeinschaftlich, enthält aber außerdem noch den prismatischen Körper αA'E'βB'F', während dem Obelisken ABCA'B'C' noch der prismatische Körper αAEβBF besonders zukommt. Hiernach ist klar, daß sich der gegebene Obelisk ABCA'B'C' von dem Prisma CEFC'E'F' um eben so viel unterscheidet, als der prismatische Körper αAEβBF den prismatischen Körper αA'E' βB'F' übertrifft. Zur Ermittelung dieses Unterschiedes führt die Vergleichung der beiden dreiseitigen Prismen αDEβBF und αD'E' βB'F' **), welche einander gleich sind, weil sie gleiche Grundflächen βBF und βB'F' (vergl. § 109 der Planimetrie) und auch gleiche Höhe haben, da sie zwischen den parallelen Ebenen DED'E' und BFB'F' liegen. Da nun das Prisma αDEβBF um die Pyramide αADE kleiner, als der prismatische Körper αAEβBF ist, aber das gleiche Prisma αD'E'βB'F' um die Pyramide αA'D'E' größer, als der prismatische Körper αA'E'βB'F' ist, so übertrifft der prismatische Körper αAEβBF den prismatischen Körper αA'E'βB'F' um die Summe der beiden Pyramiden αADE und αA'D'E', und um eben so Viel unterscheidet sich folglich auch, wie wir bereits oben gesehen haben, der gegebene Obelisk ABCA'B'C' von dem Prisma CEFC'E'F'.

Demnach ist also der Obelisk ABCA'B'C' gleich der Summe aus dem Prisma CEFC'E'F' und den beiden Pyramiden αADE und αA'D'E'.

Da diese Pyramiden beide die halbe Höhe des Obelisken $\frac{1}{2}$h

---

*) Eben so gut könnte man auch durch γ eine Parallele zu BB' ziehen.

**) Der Körper αEDβBF ist ein Prisma, weil die Seitenkanten $\alpha\beta$, DB und EF nach § 14 parallel laufen und die Grundflächen αDE und βBF nach § 15 parallel sind. — Aus gleichen Gründen ist auch der Körper αD'E' βB'F' ein Prisma.

zur Höhe haben und ihre Grundflächen ADE und A'D'E' einander gleich sind, so werden wir ihre Summe durch eine Pyramide mit der ganzen Höhe h und der Grundfläche ADE ersetzen können. Wenn wir daher das Prisma CEFC'E'F', dessen Höhe gleich der Höhe des Obelisken h und dessen Grundfläche EFC gleich der mittlern Durchschnittsfigur $\alpha\beta\gamma$ ist, (vermöge § 137), kürzer durch h . $\alpha\beta\gamma$ und die der Summe der beiden Pyramiden αADE und αA'D'E' gleiche Pyramide, welche, wie wir so eben gesehen haben, ebenfalls h zur Höhe und zur Grundfläche die Ergänzungsfigur ADE hat, (vermöge § 144) durch $\frac{1}{3}$h . ADE ausdrücken, so können wir die obige Angabe über die Größe des Obelisken in die folgende Gleichung zusammenfassen:

$$\text{Obelisk } ABCA'B'C' = h\,.\,\alpha\beta\gamma + \tfrac{1}{3}h\,.\,ADE,$$

womit die Richtigkeit unsers Satzes für einen dreiseitigen Obelisken dargethan ist.

2) Um dasselbe für einen vierseitigen Obelisken ABCDA'B'C'D' (Fig. 70) zu erhalten, ziehen wir durch eine Ecke A in der Grundfläche ABCD eine Linie, welche außerhalb des Winkels DAB fällt und die Verlängerungen der nicht durch A gehenden Grundkanten BC und CD in den Punkten E und F durchschneidet. Ferner legen wir durch die Kante AA' und die Linie EF eine Ebene und erweitern die Seitenflächen BB'CC' und CC'DD', bis sie diese Ebene in den Kanten EE' und FF' durchschneiden. Durch diese Construction entstehen ein größerer dreiseitiger Obelisk CEFC'E'F' und zwei kleinere dreiseitige Obelisken ABEA'B'E' und ADFA'D'F'; und der gegebene vierseitige Obelisk ABCDA'B'C'D' stellt sich als die Differenz dar, welche wir erhalten, wenn wir die beiden kleineren dreiseitigen Obelisken von dem größeren subtrahiren. — Construiren wir nun noch nach Anleitung des § 97 zu diesen sämmtlichen Obelisken die mittleren Durchschnittsfiguren $\alpha\beta\gamma\delta$, $\gamma\varepsilon\varphi$, $\alpha\beta\varepsilon$ und $\alpha\delta\varphi$ und die Ergänzungsfiguren abcd, cef, abe und adf, so ist dem zu Folge, was wir bereits über den dreiseitigen Obelisken erwiesen haben:

$$\text{Obelisk } CEFC'E'F' = h\,.\,\gamma\varepsilon\varphi + \tfrac{1}{3}h\,.\,cef,$$
$$\text{„ } ABEA'B'E' = h\,.\,\alpha\beta\varepsilon + \tfrac{1}{3}h\,.\,abe,$$
$$\text{„ } ADFA'D'F' = h\,.\,\alpha\delta\varphi + \tfrac{1}{3}h\,.\,adf.$$

Subtrahiren wir die beiden letzten Gleichungen von der ersten, so ergiebt sich

$$\text{Obelisk } ABCDA'B'C'D' = h\,.\,\alpha\beta\gamma\delta + \tfrac{1}{3}h\,.\,abcd.$$

3) So wie wir den vierseitigen Obelisken als die Differenz eines größeren dreiseitigen und zweier kleineren dreiseitigen Obelisken erhalten haben, eben so läßt sich auch durch eine ähnliche Construction jeder mehrseitige (nseitige) Obelisk als die Differenz eines größeren dreiseitigen und mehrerer (n — 2) kleineren dreiseitigen Obelisken darstellen und dann die nehmliche Schlußfolge anwenden, durch welche wir die Richtigkeit des Satzes für den vierseitigen dargethan haben, so daß also unser Satz ganz allgemein für jeden Obelisken gilt, welches auch immer die Anzahl seiner Seitenflächen sein mag.

Anm. Man kann auch die Hilfsconstruction für einen mehrseitigen Obelisken dadurch vereinfachen, daß man zunächst den fünfseitigen als die Differenz eines größeren vierseitigen und zweier kleineren dreiseitigen Obelisken, eben so den sechsseitigen als die Differenz eines größeren fünfseitigen und zweier kleineren dreiseitigen Obelisken, überhaupt den nseitigen als die Differenz eines größeren n — 1seitigen und zweier kleineren dreiseitigen Obelisken darstellt.

Wir haben uns in dem oben geführten Beweise auf den einfachsten und am häufigsten Anwendung findenden Fall beschränkt, daß die Winkel der Grundfläche sämmtlich hohl sind. Der Beweis bleibt jedoch auch dann noch im Wesentlichen derselbe, wenn unter den Winkeln der Grundfläche eines mehrseitigen Obelisken erhabene vorkommen. Die in jedem besondern Falle leicht aufzufindende Abänderung, welche der Beweis hierdurch erleiden kann, besteht nur darin, daß man, um den mehrseitigen Obelisken zu erhalten, nicht mehr von einem dreiseitigen, sondern von der Summe mehrerer dreiseitigen Obelisken die Summe der übrigen zu subtrahiren hat.

Mit dieser Abänderung kann man überhaupt als Hilfsebene jede beliebige die Grundkanten oder ihre Verlängerungen und die Seitenflächen oder ihre Erweiterungen durchschneidende Ebene annehmen. Allemal läßt sich der gegebene mehrseitige Obelisk als die Differenz zwischen den Summen mehrerer dreiseitigen Obelisken darstellen.

§ 148. Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt J eines Obelisken zu berechnen, wenn die Höhe desselben = h, die mittlere Durchschnittsfigur = M und die Ergänzungsfigur = E gegeben ist.

Aufl. $J = h(M + \frac{1}{3}E)$.

Der Beweis ist im vorherg. § enthalten.

Anm. Die so eben mitgetheilte Formel empfiehlt sich besonders dadurch, daß sie die Berechnung einer nicht unbedeutenden Zahl von Körpern umfaßt, für welche früher eben so viele besondere Formeln gemerkt werden mußten, und daß sie an Einfachheit und Kürze des Ver-

fahrens keiner jener besondern Formeln irgend nachsteht, vielmehr die meisten noch übertrifft. — Ein anderer praktischer Vortheil der obigen Formel besteht darin, daß in vielen Fällen die Ergänzungsfigur so klein ausfällt, daß man dieselbe, wenn es sich nur um eine ohngefähre Kenntniß der Größe eines Obelisken handelt, ganz vernachlässigen, also nach der abgekürzten Formel $J = h \, . \, M$
rechnen kann, und daß sich die Größe des bei diesem abgekürzten Verfahren begangenen Fehlers leicht in Voraus abschätzen läßt. Dieser ist nehmlich im Allgemeinen um so kleiner, je weniger die Dimensionen der einen Grundfläche von denen der andern abweichen. Man kann daher von vorn herein leicht die Fälle beurtheilen, in welchen das abgekürzte Verfahren zulässig ist, und in welchen dasselbe ein von der Wahrheit zu sehr abweichendes Resultat ergeben würde.

§ 149. Zusatz.

Ein Obelisk, dessen Grundflächen ABCD und A′B′C′D′ (Fig. 71) Rechtecke sind, führt den französischen Namen Ponton und kann füglich den deutschen Namen Kasten erhalten. *)

Ist nun von einem Kasten die Höhe $= h$, sind ferner die Längen der beiden Grundflächen $AB = a$ und $A'B' = a'$, die zugehörigen Breiten $AD = b$ und $A'D' = b'$ gegeben, also die Länge und Breite der mittlern Durchschnittsfigur $= \frac{a+a'}{2}$ und $\frac{b+b'}{2}$, ferner die Länge und Breite der Ergänzungsfigur $= \frac{a-a'}{2}$ und $\frac{b-b'}{2}$, so ist der Inhalt des Kastens

$$J = h \, . \left(\frac{a+a'}{2} \, . \, \frac{b+b'}{2} + \tfrac{1}{3} \, . \, \frac{a-a'}{2} \, . \, \frac{b-b'}{2}\right).$$

Anm. 1. Ist z. B. $h = 6$, $a = 20$, $b = 9$
und $a' = 16$, $b' = 7$ gegeben, so ist

$$J = 6 \, . \, (18 \, . \, 8 + \tfrac{1}{3} \, . \, 2 \, . \, 1) = 6 \, . \, (144 + \tfrac{2}{3}) = 868.$$

Anm. 2. Früher berechnete man den Inhalt des Kastens (Pontons) nach der minder bequemen Formel

$$J = \tfrac{1}{6} h \left[b \, . \, (2a + a') + b' (2a' + a) \right].$$

Ueber die Uebereinstimmung dieser und der so eben mitgetheilten Formel vergl.: Ein neuer Lehrsatz der Stereometrie, Essen 1843, S. 14.

*§ 150. Zusatz.

1) Ist von einem dreiseitigen Obelisken die Höhe $= h$ und

*) Es pflegen nehmlich Vorrathskasten in Haushaltungen, Koffer, Truhen, die Bretterkasten der Wagen, welche Kohlen, Steine, überhaupt lose Gegenstände laden, Schubkarren u. a. m. diese Gestalt zu haben.

sind die Höhen der beiden dreiseitigen Grundflächen = a und a,' die Grundlinien = b und b' gegeben, so ist der **Inhalt des dreiseitigen Obelisken**

$$J = \frac{h}{2}\left(\frac{a+a'}{2} \cdot \frac{b+b'}{2} + \frac{1}{3}\,\frac{a-a'}{2} \cdot \frac{b-b'}{2}\right),$$

eine Formel, welche von der im vorhergeh. § für den Kasten mitgetheilten, sich nur durch Hinzufügung des Divisors 2 unterscheidet.

2) **Wenn die Grundflächen eines Obelisken Trapeze sind**, derselbe also überhaupt von sechs Trapezen eingeschlossen ist, und die mittleren Längen der trapezischen Grundflächen = a und a', ihre Breiten = b und b' gegeben sind, ferner die Höhe des ganzen Körpers = h ist, so ist der **Inhalt** dieses Obelisken

$$J = h \cdot \left(\frac{a+a'}{2} \cdot \frac{b+b'}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{a-a'}{2} \cdot \frac{b-b'}{2}\right),$$

also ganz dieselbe Formel, wie für den Kasten (Ponton).

3) Wenn die Grundflächen eines Obelisken ähnliche Vielecke sind, also der Obelisk (nach § 96) ein Theil einer Pyramide ist, und die eine Grundfläche = G, das Verhältniß einer Seite derselben zur gleichliegenden Seite in der andern Grundfläche = m : n und die Höhe des ganzen Körpers = h gegeben ist, so ist vermöge § 210 der Planimetrie

$$M = \left(\frac{m+n}{2m}\right)^2 . G \text{ und } E = \left(\frac{m-n}{2m}\right)^2 . G,$$

folglich **der Inhalt der abgekürzten Pyramide**

$$J = h . G . \left(\left(\frac{m+n}{2m}\right)^2 + \frac{1}{3} . \left(\frac{m-n}{2m}\right)^2\right).$$

(Noch mehr Beispiele giebt: Ein neuer Lehrsatz der Stereometrie, S. 16; 22 u. f.)

Anm. 1. Da die Grundflächen eines dreiseitigen Obelisken einander ähnlich sind, so muß sich in der unter Nr. 1. des vorhergeh. § mitgetheilten Formel a : a' = b : b' verhalten.

Ueber die nähere Begründung der unter Nr. 2 mitgetheilten Formel s. a. a. O. S. 15 und 16.

Früher berechnete man die abgekürzte Pyramide nach der weniger bequemen Formel $J = \frac{1}{3} h . (G + \sqrt{GG'} + G')$, wo G und G' die Grundflächen und h die Höhe des Körpers bezeichnen. Ueber die Zurückführung dieser Formel auf die oben unter Nr. 3 mitgetheilte s. a. a. O. S. 18 und 19.

Anm. 2. Wir haben bisher durchgehends angenommen, daß alle Seiten der einen (untern) Grundfläche größer sind, als die gleichliegen-

den Seiten der andern (obern) Grundfläche. Es können aber auch die Seiten der obern Grundfläche zum Theil eben so groß oder kleiner sein, als die gleichliegenden Seiten der untern Grundfläche. Verfolgt man indeß den Gang des Beweises in § 147, so wird man sich in jedem besondern Falle leicht von der Richtigkeit unsers Satzes überzeugen können. Wenn daher a und a' zwei gleichliegende Seiten in der untern und obern Grundfläche eines Obelisken bezeichnen und $a = a'$ oder $a < a'$ sein sollte, so wird man in der Formel, welche überhaupt den Inhalt des auszumessenden Obelisken angiebt, im ersten Falle statt $a - a'$ Null, im andern eine negative Zahl zu setzen haben.

Ist z. B. von einem Kasten (Ponton) die Höhe $h = 8$, sind ferner die Seiten der untern Grundfläche $a = 12$ und $b = 4$, die Seiten der obern Grundfläche $a' = 9$ und $b' = 6$ gegeben, so ist

$$\frac{a+a'}{2} = 10\tfrac{1}{2} \text{ und } \frac{a-a'}{2} = 1\tfrac{1}{2},$$

$$\frac{b+b'}{2} = 5 \text{ und } \frac{b-b'}{2} = -1,$$

folglich wenn wir diese Werthe in die Formel des § 149 einsetzen, der Inhalt des Kastens

$$J = 8 . (10\tfrac{1}{2} . 5 + \tfrac{1}{3} . 1\tfrac{1}{2} . -1) = 8 . (52\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}) = 8 . 52 = 416.$$

Anm. 3. Wenn in einem Trapeze die kleinere Parallele bis Null abnimmt, so geht das Trapez in ein Dreieck über; man kann daher das Dreieck als einen besondern Fall des Trapezes ansehen, der entsteht, wenn die kleinere Parallele verschwindet. Unser Satz muß daher auch noch für solche Körper gelten, welche parallele Grundflächen und zu Seitenflächen theils Trapeze, theils Dreiecke haben. Wir beschränken uns auf die Betrachtung des folgenden Falles *):

Wenn in einem Obelisken, dessen Grundflächen Trapeze sind, die Breite der obern Grundfläche verschwindet, so verwandelt sich derselbe in einen Körper, welcher von drei Trapezen ABED, ACFD und BCFE und zwei Dreiecken ABC und DEF (Fig. 72) eingeschlossen ist. Dieser Körper ist offenbar ein Theil eines dreiseitigen prismatischen Raumes (§ 84), da die drei Kanten AD, BE und CF parallel laufen, und führt den Namen eines dreiseitigen prismatischen Abschnittes. Er unterscheidet sich von dem dreiseitigen Prisma darin, daß die Ebenen der Dreiecke ABC und DEF nicht nothwendig einander parallel sind. Denken wir uns nun diesen Körper aus einem Obelisken, dessen untere Grundfläche das Trapez ABED bildet, dadurch hervorgegangen, daß die Breite der obern trapezischen Grundfläche verschwunden und folglich ihre Länge CF allein noch übrig geblieben ist, so werden wir den Inhalt dieses Körpers nach der in § 150, Nr. 2 mitgetheilten Formel:

$$J = h\left(\frac{a+a'}{2} . \frac{b+b'}{2} + \tfrac{1}{3} . \frac{a-a'}{2} . \frac{b-b'}{2}\right)$$

*) Noch einen andern, in praktischer Hinsicht nicht unwichtigen Fall behandelt: Ein neuer Lehrs. d. Ster. S. 25.

berechnen können. Wenn wir nun der Kürze wegen die Kante AD = k BE = l und CF = m setzen, ferner den Körper mit einer zu diesen parallelen Kanten senkrechten Ebene KLM durchschneiden und die Höhe dieses Dreiecks MN = h, die Grundlinie KL = g annehmen, so werden wir, um die angeführte Formel auf unsere Körper anzuwenden, zu setzen haben: $a = \frac{k+l}{2}$, $b = g$, $a' = m$, $b' = o$ und $h = h$,

folglich

$$\frac{a+a'}{2} = \frac{k+l+2m}{4}, \quad \frac{a-a'}{2} = \frac{k+l-2m}{4} \text{ und } \frac{b+b'}{2} = \frac{b-b'}{2} = \frac{g}{2}.$$

Hiernach verwandelt sich die obige Formel in:

$$J = h\left(\frac{k+l+2m}{4} \cdot \frac{g}{2} + {}^1/_3 \cdot \frac{k+l-2m}{4} \cdot \frac{g}{2}\right)$$

$$= \frac{h \cdot g}{2} \cdot \left(\frac{k+l+2m}{4} + \frac{k+l-2m}{12}\right)$$

$$= \frac{h \cdot g}{2} \cdot \left(\frac{4k+4l+4m}{12}\right) = \frac{h \cdot g}{2} \cdot \left(\frac{k+l+m}{3}\right).$$

Nun ist aber $\frac{h \cdot g}{2}$ der Inhalt des Dreiecks KLM, und die so eben erhaltene Formel läßt sich folglich auch so schreiben:

$$J = \triangle \text{ KLM} \cdot \left(\frac{k+l+m}{3}\right)$$

d. h.: Der Inhalt eines dreiseitigen prismatischen Abschnitts wird gefunden, wenn man den senkrechten Durchschnitt mit der Summe der drei Kanten multiplicirt und durch drei dividirt.

Der Inhalt eines mehrseitigen prismatischen Abschnitts wird erhalten, wenn man denselben durch Diagonalebenen in dreiseitige zerschneidet.

§ 151. Lehrsatz.

Ein mit der Grundfläche parallel abgekürzter Kegel ist gleich der Summe aus einem Cylinder und einem Kegel, welche beide mit dem abgekürzten Kegel gleiche Höhe haben, und von denen der Cylinder die halbe Summe, der Kegel aber die halbe Differenz der Radien der beiden Grundflächen des abgekürzten Kegels zu Radien der Grundflächen haben.

Beweis. Wenn wir uns den abgekürzten Kegel als einen Obelisken mit regelmäßigen Grundflächen von unendlich vielen Seiten denken, so werden wir denselben nach § 147 gleich der Summe aus einem Cylinder und einem Kegel setzen können, welche beide mit dem Obelisken gleiche Höhe haben und von denen der Cy-

linder die mittlere Durchschnittsfigur, der Kegel die Ergänzungsfigur zur Grundfläche hat. Nun ist aber der Radius der mittlern Durchschnittsfigur offenbar der halben Summe und der Radius der Ergänzungsfigur der halben Differenz der Radien der beiden Grundflächen des abgekürzten Kegels gleich, — woraus die Richtigkeit des aufgestellten Satzes hervorgeht.

§ 152. Aufgabe.

Aus der Höhe h und den Radien r und ϱ der beiden Grundflächen eines abgekürzten Kegels den körperlichen Inhalt desselben J zu berechnen.

Aufl. Wenn wir uns den abgekürzten Kegel nach dem vorhergeh. § in einen Cylinder und einen Kegel zerfällt denken, so ist nach § 140 der Inhalt des Cylinders $= \left(\frac{r+\varrho}{2}\right)^2 \pi h$ und nach § 146 der Inhalt des Kegels $= \frac{1}{3} . \left(\frac{r-\varrho}{2}\right)^2 \pi h$, folglich der Inhalt des abgekürzten Kegels

$$J = \pi h \left(\left(\frac{r+\varrho}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} . \left(\frac{r-\varrho}{2}\right)^2\right).$$

Anm. 1. Ist z. B. von einem abgekürzten Kegel $r = 9$, $\varrho = 5$, also $\frac{r+\varrho}{2} = 7$, $\frac{r-\varrho}{2} = 2$ und $h = 8$ gegeben, so ist der körperliche Inhalt desselben, wenn wir für π den Näherungswerth $3\frac{1}{7}$ setzen:

$$J = \frac{22}{7} . 8 . (49 + \frac{4}{3}) = 1265\frac{11}{21}.$$

Anm. 2. Wenn man den eingeschlossenen Theil der obigen Formel entwickelt, so verwandelt sich dieselbe in

$$J = \pi h \left(\frac{r^2 + 2r\varrho + \varrho^2}{4} + \frac{r^2 - 2r\varrho + \varrho^2}{12}\right)$$

$$= \pi h \left(\frac{4r^2 + 4r\varrho + 4\varrho^2}{12}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi h(r^2 + r\varrho + \varrho^2),$$

welches die in praktischer Hinsicht minder bequeme Formel ist, nach welcher man früher den abgekürzten Kegel berechnete.

Anm. 3. Die Anwendung des obigen Lehrsatzes (§ 147) auf solche Körper, welche von krummen Flächen eingeschlossen werden, beschränkt sich jedoch nicht bloß auf den abgekürzten Kegel, sondern erstreckt sich überhaupt über alle Körper, welche zwei parallele Grundflächen und eine krumme Seitenfläche haben, auf der sich gerade Linien ziehen lassen, welches auch immer die krummen Linien sein mögen,

welche die Grundflächen begrenzen. Als Beispiel wollen wir einen Körper annehmen, dessen beide Grundflächen Ellipsen sind, wie dieß bei Wannen, Tonnen u. dgl. m. nicht selten der Fall ist. Wir setzen hier als bekannt voraus, daß der Flächeninhalt einer Ellipse gleich ist dem Producte der beiden halben Axen und der Verhältnißzahl π *) Sind nun von dem auszumessenden Körper die beiden halben Axen der einen Grundfläche = a und b, die beiden halben Axen der andern Grundflächen = a' und b', und ist die Höhe des ganzen Körpers = h gegeben, so ist sein Inhalt

$$J = \pi h \left(\frac{a+a'}{2} \cdot \frac{b+b'}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{a-a'}{2} \cdot \frac{b-b'}{2}\right).$$

D. Kugel.

§ 153. Aufgabe.

Aus dem Radius r einer Kugel ihren Inhalt J zu berechnen.

Aufl. So wie der Kreis einem Dreiecke gleich ist, welches die Peripherie zur Grundlinie und den Radius zur Höhe hat, so ist die Kugel einer Pyramide gleich, welche die Kugeloberfläche zur Grundfläche und den Radius zur Höhe hat. Nach § 124 ist die Kugeloberfläche = $4r^2\pi$, folglich wenn wir mit $\frac{1}{3}r$ multipliciren, der gesuchte Inhalt der Kugel

$$J = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

Anm. 1. Ist z. B. von einer Kugel r = 5 gegeben, so ist näherungsweise $J = \frac{4}{3} \cdot 125 \cdot 3\frac{1}{7} = 523\frac{17}{21}$.

Anm. 2. Durch den vorhergeh. § sind wir auch in den Stand gesetzt, die beiden folgenden Aufgaben zu lösen:

1) Den Inhalt eines Kugelabschnitts zu berechnen, wenn der Radius der Kugel r und die Höhe des Abschnitts h gegeben ist.

Aufl. Wird der Kreisausschnitt ACB (Fig. 73) um den Radius AC als Axe gedreht, so beschreibt er einen kegelförmigen Kugelausschnitt, der offenbar einer Pyramide gleich ist, welche die vom Bogen AB beschriebene Calotte ($2r\pi h$) zur Grundfläche und den Radius r zur Höhe hat, folglich ist

der Inhalt des kegelförmigen Ausschnitts = $\frac{2}{3}r^2\pi h$.

Um den Inhalt des Abschnitts zu erhalten, hat man noch den Inhalt des Kegels zu berechnen, welcher bei der Umdrehung durch das Dreieck BCD erzeugt wird, und hierzu ist vor Allem die Bestimmung der Linie BD erforderlich, welche sich aber ganz leicht aus der Gleichung

*) Vergl. die Anm. zu § 1 des Anhangs.

$$h : BD = BD : 2r - h \text{ oder } BD^2 = h(2r - h)$$

ergiebt. — Hiernach ist der Inhalt des Kegels $= \frac{1}{3}BD^2 . \pi . CD = \frac{1}{3}h(2r - h)\pi(r - h)$, folglich der Inhalt des Abschnittes

$$J = \frac{1}{3}\pi h[2r^2 - (2r - h).(r - h)] = \frac{1}{3}\pi h(3rh - h^2)$$
$$= \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h).$$

2) Den Inhalt einer körperlichen Kugelzone zu bestimmen, wenn der Radius der Kugel r, die Höhe der Zone h und der Abstand ihrer größern Grundfläche vom Kugelmittelpunkte a gegeben ist.

Aufl. Die körperliche Zone ist gleich dem Unterschied zweier Kugelabschnitte, von denen der größere die Höhe $r - a$ und der kleinere die Höhe $r - a - h$ hat, der Inhalt der körperlichen Zone ist daher nach (1)

$$J = \frac{1}{3}\pi . [(r - a)^2 . (2r + a) - (r - a - h)^2 . (2r + a + h)],$$

oder nach einigen Zusammenziehungen

$$J = \frac{1}{3}\pi h(3r^2 - 3a^2 - 3ah - h^2).$$

Bezeichnet man den Radius der größern Grundfläche der Zone mit ϱ_1 und den Radius der kleinern Grundfläche mit ϱ_2, so ist, wie man leicht sieht:

$$\varrho_1{}^2 = r^2 - a^2$$
$$\varrho_2{}^2 = r^2 - (a + h)^2 = r^2 - a^2 - 2ah - h^2,$$

folglich $\frac{\varrho_1{}^2 + \varrho_2{}^2 + h^2}{2} = r^2 - a^2 - ah.$

Hiernach läßt sich dem Ausdrucke für den Inhalt der Zone auch folgende merkenswerthe Gestalt geben:

$$J = \frac{1}{3}\pi h . [\frac{3}{2}(\varrho_1{}^2 + \varrho_2{}^2 + h^2) - h^2]$$
$$= \frac{1}{6}\pi h(3\varrho_1{}^2 + 3\varrho_2{}^2 + h^2)$$
$$= \frac{1}{2}\pi h(\varrho_1{}^2 + \varrho_2{}^2 + \frac{1}{3}h^2).$$

Aus dieser Formel folgt, daß die Zone drei Körpern zusammen genommen gleich ist, nehmlich zweien Cylindern mit der Höhe $\frac{1}{2}h$ und den Radien ϱ_1 und ϱ_2 und einer Kugel mit dem Radius $\frac{1}{2}h$.

Es ist übrigens äußerst merkwürdig, daß sich der Inhalt des Kugelabschnittes und der Inhalt der Zone durch so einfache algebraische Ausdrücke darstellen lassen, während es gar nicht möglich ist, den Inhalt des Kreisabschnittes oder eines Theiles des Kreises, der von zwei parallelen Sehnen begrenzt wird, durch einen bloß algebraischen Ausdruck darzustellen.

§ 154. Zusatz.

Haben ein Kegel, eine Kugel und ein Cylinder einerlei Höhe und Durchmesser (2r), so verhalten sich ihre körperlichen Inhalte wie die Zahlen 1, 2, 3.

Beweis. Denn es verhält sich

der Kegel : Kugel : Cylinder $= \frac{1}{3}r^2\pi . 2r : \frac{4}{3}r^3\pi : r^2\pi . 2r,$
$= \frac{2}{3} : \frac{4}{3} : 2 = 1 : 2 : 3.$

§ 155. Zusatz.

Aus § 124 und 153 folgt:

1) Die Oberflächen zweier Kugeln verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser oder Radien, und

2) ihre körperlichen Inhalte verhalten sich wie die Kuben (dritten Potenzen) der Durchmesser oder Radien.

Anm. Aehnliche Bestimmungen gelten von ähnlichen Körpern überhaupt. — Da zunächst bei ähnlichen eckigen Körpern die Seitenflächen nach der Reihe ähnlich sind und sich also sämmtlich wie die Quadrate ähnlich liegender Kanten verhalten, so müssen offenbar auch die ganzen Oberflächen in diesem Verhältnisse zu einander stehen. — Bei ähnlichen Pyramiden und Prismen verhalten sich die ähnlich liegenden Kanten wie die Höhen, also die ganzen Oberflächen wie die Quadrate der Höhen. Dasselbe muß folglich auch von ähnlichen Kegeln und Cylindern gelten, und da sich bei diesen die Höhen wie die Radien oder Durchmesser der Grundflächen verhalten, so stehen folglich die Oberflächen im quadratischen Verhältnisse dieser Radien oder Durchmesser, wie dieß für grade Kegel und Cylinder bereits in den Anmerk. zu § 93 und 97 dargethan ist.

So wie sich ähnliche Polygone durch Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerschneiden lassen, so können offenbar auch ähnliche Polyeder in ähnliche Pyramiden zerschnitten werden. Die Inhalte zweier Pyramiden überhaupt verhalten sich

$$J : J' = G . h : G' . h';$$

bei ähnlichen Pyramiden ist aber nach § 89 Anm. 2

$$G : G' = h^2 : h'^2,$$

also

$$J : J' = h^3 : h'^3;$$

da sich nun die Höhen wie homologe Kanten verhalten, so verhalten sich folglich die Inhalte zweier ähnlichen Pyramiden wie die Kuben homologer Kanten, und in dem nehmlichen Verhältnisse stehen nach dem Obigen die Inhalte ähnlicher Polyeder überhaupt. — Die Inhalte ähnlicher Cylinder und Kegel verhalten sich daher auch, wie man leicht begreift, wie die Kuben der Radien oder Durchmesser ihrer Grundflächen.

Bemerkung. Zur bequemen Uebersicht wollen wir hier noch die im Vorhergehenden enthaltenen Formeln über die Berechnung des Inhalts und der Oberflächen der Körper zusammenstellen. — Es ist nach den früher angewendeten Bezeichnungen

1) beim Würfel . . . . der Inhalt $= a^3$;
2) beim rechtwinkligen Parallelepipedum . . . . . der Inhalt $= a . b . c$;
3) beim Prisma . . . . der Inhalt $= G . h$;
4) bei der Pyramide . . . der Inhalt $= \frac{1}{3} . G . h$;
5) beim Obelisken . . . . der Inhalt $= h . (M + \frac{1}{3} E)$;

6) beim Cylinder . . . der Mantel $= 2r\pi h$, der Inhalt $= r^2\pi h$;

7) beim Kegel . . . . der Mantel $= r\pi f$, der Inhalt $= \frac{1}{3}r^2\pi h$;

8) beim abgekürzten Kegel der Mantel $= (r+\varrho)\pi f$, der Inhalt $= \pi h\left[\left(\frac{r+\varrho}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{r-\varrho}{2}\right)^2\right]$;

9) bei der Kugel . . . . die ganze Oberfläche $= 4r^2\pi$, die Oberfläche der Zone oder Calotte $= 2r\pi h$, der Inhalt $= \frac{4}{3}r^3\pi$.

Die Ausdrücke für den Mantel in (6), (7) und (8) gelten jedoch nur dann, wenn Cylinder und Kegel gerade sind.

Anhang.

Von der Ausmessung der Fässer.

§ 1. Erklärung.

Wenn man auf dem Durchmesser AB eines Halbkreises AD'B (Fig. 74) in beliebigen Punkten Lothe bis an die Peripherie zieht und dann sämmtliche Lothe nach demselben Verhältnisse theilt (oder verlängert), so liegen die Theilungspunkte auf der Hälfte ADB einer krummen Linie, welche man eine Ellipse nennt. Der Durchmesser AB, welcher die Ellipse in zwei symmetrische Hälften theilt, heißt die erste Axe derselben, und das im Mittelpunkte C errichtete Loth CD, welches die Ellipse ebenfalls symmetrisch theilt, wird die halbe zweite Axe genannt.

Anm. Man sieht aus dieser Erklärung leicht, daß die von der Ellipse eingeschlossene Fläche zur Fläche des Kreises das nehmliche Verhältniß hat, nach welchem die auf dem Durchmesser AB errichteten Lothe getheilt sind. Wenn wir also die halbe erste Axe der Ellipse $AC = BC = CD' = a$, die halbe zweite Axe der Ellipse $CD = b$ setzen, ferner die Fläche der Ellipse mit E und die Fläche des Kreises mit K bezeichnen, so ist
$$E : K = CD : CD' = b : a,$$
also
$$E = \frac{b \, . \, K}{a}.$$
Nach § 221 der Planimetrie ist aber $K = a^2\pi$, folglich
$$E = \frac{b \, . \, a^2\pi}{a} = ab\pi.$$

§ 2. Erklärung.

Die krumme Oberfläche eines Fasses wird erzeugt, wenn man einen Bogen FH (Fig. 74) um eine zur Sehne desselben parallele Axe EG dreht. — Von diesem Bogen FH läßt sich im Allgemeinen weder für bestimmt behaupten, daß er einem Kreise, noch überhaupt, welcher krummen Linie er angehört. So viel indeß steht fest, daß er seine hohle Seite gegen die Axe wendet, daß er von dem Endpunkte F bis zur Mitte D sich stetig von der Axe entfernt und von D bis H sich derselben eben so nähert, und daß also DF und DH symmetrische Hälften sind. — Da eine ganz bestimmte Vorschrift über die Natur der krummen Linie, welcher der Bogen

FH angehört, nicht vorhanden ist, so wird es uns frei stehen, irgend eine solche zu wählen, welche den angeführten Bedingungen genügt. Als besonders einfach erscheint die Annahme, daß der Bogen FDH einer Ellipse angehört, deren erste Axe AB mit der Umdrehungsaxe EG zusammenfällt und die folglich ihren Mittelpunkt in C hat. Dieß vorausgesetzt, stellen wir den folgenden Lehrsatz auf.

§ 3. Lehrsatz.

Jedes Faß ist gleich der Summe dreier Kegel, welche sämmtlich mit dem Fasse gleiche Höhe haben, und von denen zwei den größten und einer den kleinsten Querdurchschnitt des Fasses zur Grundfläche hat.

Bezeichnen wir daher den Inhalt des Fasses mit F, die Höhe desselben mit h, den größten Radius (am Spunde) mit r, den kleinsten (am Boden) mit ϱ, so ist

$$F = \frac{1}{3}\pi h(2r^2+\varrho^2).$$

Beweis. Es sei EFHG (Fig. 74) die Hälfte eines durch die Axe EG gelegten Querdurchschnitts des auszumessenden Fasses, also nach § 2 FDH ein Bogen und ADB die Hälfte einer Ellipse. Verlängern wir nun EF und GH bis sie den Halbkreis AD'B in F' und H' treffen, und denken uns hierauf die ganze Figur um AB als Axe gedreht, so erzeugt der Halbkreis AD'B eine Kugel, die halbe Ellipse ADB einen Körper, welchen man ein Sphäroid nennt, ferner das Viereck EF'H'G eine körperliche Kugelzone und das Viereck EFHG das auszumessende Faß. — Um nun zunächst den Inhalt der körperlichen Kugelzone zu berechnen, ziehen wir die Radien CF' und CH', wodurch das Viereck EF'H'G in die beiden rechtwinkligen Dreiecke CEF' und CGH' und in den Kreisausschnitt CF'H' zerschnitten wird. Die rechtwinkligen Driecke CEF' und CGH' erzeugen bei der Umdrehung zwei Kegel, welche CE = CG = $\frac{1}{2}$h zur Höhe und EF' = GH' zu Radien haben. Der Inhalt eines jeden derselben ist folglich, wenn wir EF' = GH' = ϱ' setzen, = $\frac{1}{3}\varrho'^2\pi \cdot \frac{1}{2}h$; also sind beide zusammen

$$= \frac{1}{3}\varrho'^2\pi h.$$

Der Kreisausschnitt CF'H' erzeugt bei der Umdrehung einen Körper, welchen wir uns als die Summe unendlich vieler unendlich kleiner Kegel denken können, die alle ihre Spitze im Mittelpunkte C und ihre Grundflächen auf der vom Bogen F'H' beschriebenen Kugelzone haben, und die folglich zusammen einem Kegel gleich sind, welcher den Kugelradius zur Höhe und die vom Bogen F'H'

beschriebene Kugelzone zur Grundfläche hat. Nun ist der Flächeninhalt der Kugelzone, wenn wir den Radius $CD' = r'$ setzen, bekanntlich $= 2r'\pi h$, folglich der Inhalt des durch $CF'H'$ erzeugten Körpers $\frac{1}{3}r'.2r'\pi h = \frac{2}{3}r'^2\pi h$.
Addiren wir hierzu den Ausdruck, welchen wir oben für die Summe der beiden Kegel gefunden haben, welche die Dreiecke CEF' und CGH' erzeugen, so erhalten wir

$$\frac{2}{3}r'^2\pi h + \frac{1}{3}\varrho'^2\pi h = \frac{1}{3}\pi h(2r'^2 + \varrho'^2)$$

als den Inhalt der körperlichen Zone, welche das Viereck $EF'H'G$ bei der Umdrehung erzeugt.

Um hieraus den Inhalt des auszumessenden Fasses, welches von dem Vierecke $EFHG$ erzeugt wird, herzuleiten, denken wir uns durch einen beliebigen Punkt K in der Axe eine zu derselben senkrechte Ebene gelegt, so durchschneidet dieselbe die beiden Körper in zwei Kreisen, deren Radien KL und KL' sind. Die Flächen zweier Kreise verhalten sich bekanntlich wie die Quadrate ihrer Radien, also im vorliegenden Falle wie $KL^2 : KL'^2$. Nach § 1 ist aber

$$KL^2 : KL'^2 = CD^2 : CD'^2 = r^2 : r'^2.$$

Da dieses nehmliche Verhältniß zwischen den Durchschnitten des Fasses und der körperlichen Kugelzone immer stattfindet, wo wir auch die schneidende Ebene legen mögen, so überzeugt man sich leicht, daß auch die Körper selbst ihrem Inhalte nach in demselben Verhältnisse stehen. Wenn wir also die körperliche Zone mit Z bezeichnen, so verhält sich $F : Z = r^2 : r'^2$,

woraus sich $$F = Z.\frac{r^2}{r'^2}$$

ergiebt. — Wir haben oben

$$Z = \frac{1}{3}\pi h(2r'^2 + \varrho'^2)$$

gefunden; also ist $$F = \frac{1}{3}\pi h(2r'^2 + \varrho'^2).\frac{r^2}{r'^2}$$

$$= \frac{1}{3}\pi h\left(2r'^2.\frac{r^2}{r'^2} + \varrho'^2.\frac{r^2}{r'^2}\right).$$

Nach § 1 ist aber $r^2 : r'^2 = \varrho^2 : \varrho'^2$; hiernach läßt sich die so eben erhaltene Gleichung auch so schreiben:

$$F = \frac{1}{3}\pi h\left(2r'^2.\frac{r^2}{r'^2} + \varrho'^2.\frac{\varrho^2}{\varrho'^2}\right)$$

oder $$F = \frac{1}{3}\pi h(2r^2 + \varrho^2),$$ w. z. e. w.

Anm. Ist z. B. von einem Fasse gegeben:
$r = 15''$, $\varrho = 13''$ und $h = 22''$,

so ist der körperliche Inhalt desselben

$$F = \frac{1}{3} \cdot 3\frac{1}{7} \cdot 22 \cdot (2 \cdot 15^2 + 13^2) = 13266\frac{10}{21} \text{ (Kubikzoll).}$$

Da ein preußisches Quart = 64 Kubikzoll ist, so enthält das so eben berechnete Faß (ohngefähr) 207 Quart. *)

Da indeß die Gestalt der Fässer weder eine ganz regelmäßige, noch bei allen übereinstimmende, ja nicht einmal bei dem nehmlichen Fasse unveränderliche ist, so kann es auch keine Formel geben, welche für alle Fässer ganz genau paßte, sondern man wird sich in den meisten Fällen mit annähernden Resultaten begnügen müssen, zu deren Berechnung sich die obige Formel besonders durch ihre große Einfachheit vor andern zu diesem Zwecke vorgeschlagenen Formeln empfiehlt.

§ 4. Zusatz.

Aus dem Beweise des obigen Lehrsatzes geht auch noch hervor, daß sich das durch Umdrehung der halben Ellipse ADB erzeugte Sphäroid zu der Kugel, welche der Halbkreis AD'B bei der Umdrehung beschreibt, wie $CD^2 : CD'^2$ verhält. Bezeichnen wir also das Sphäroid mit S, die Kugel mit K, ferner die halbe erste Axe der Ellipse AC = CD' mit a, die halbe zweite CD mit b, so verhält sich

$$S : K = b^2 : a^2.$$

Nun ist aber nach § 153 der Stereometrie

$$K = \frac{4}{3}a^3\pi,$$

folglich

$$S = \frac{4}{3}a^3\pi \cdot \frac{b^2}{a^2}$$

oder

$$S = \frac{4}{3}ab^2\pi.$$

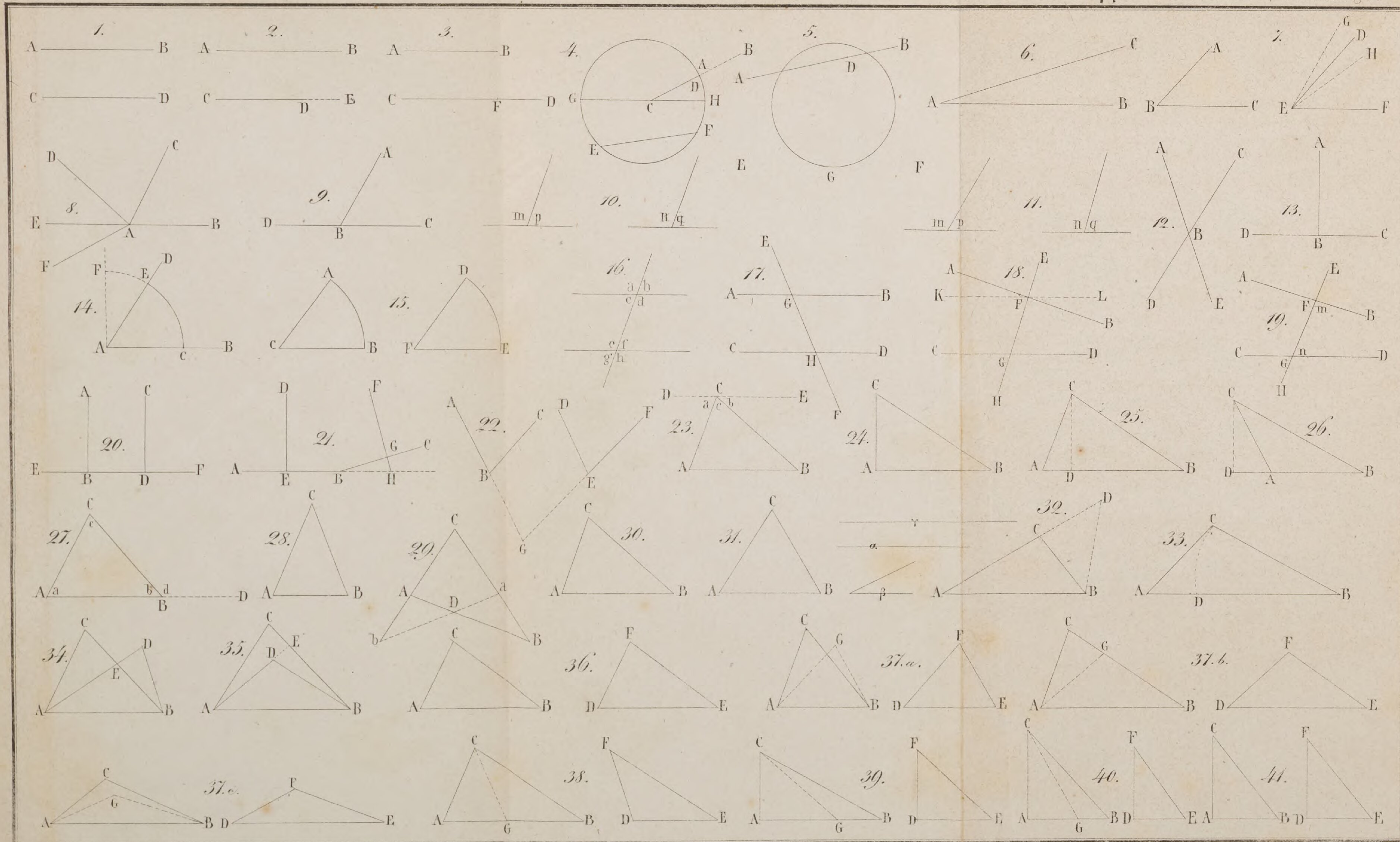
Anm. 1. In dieser Formel kann (vermöge § 1) a sowohl >, als < b sein.

Anm. 2. Bei der Erde, welche sehr nahe die Gestalt eines Sphäroids hat, ist $a = 856{,}55$ und $b = 859{,}44$ geographische Meilen. Hieraus ergiebt sich ihr Kubikinhalt, wenn man $\pi = 3{,}1415927$ setzt:

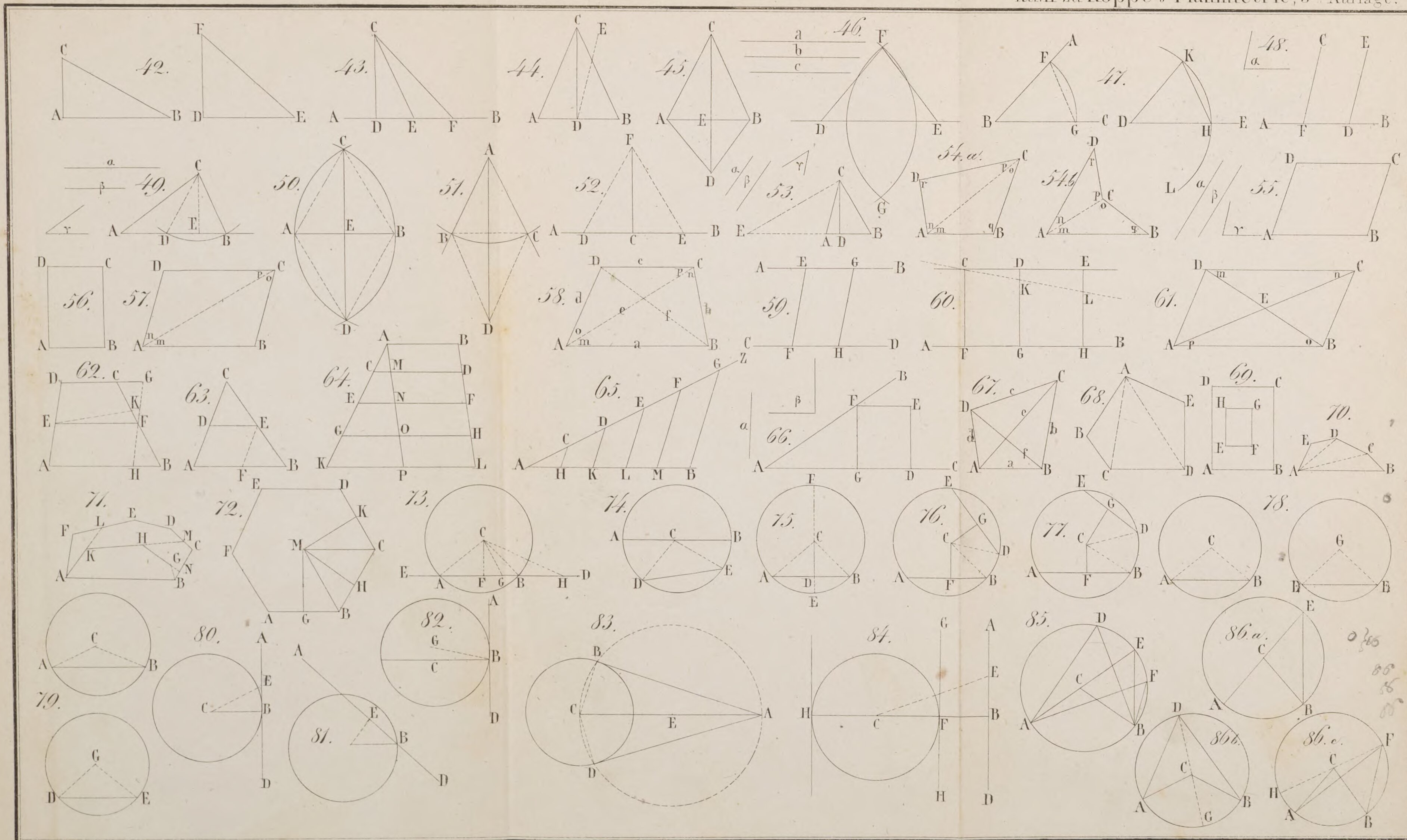
$$J = 2650160000 \text{ Kubikmeilen (ohngefähr).}$$

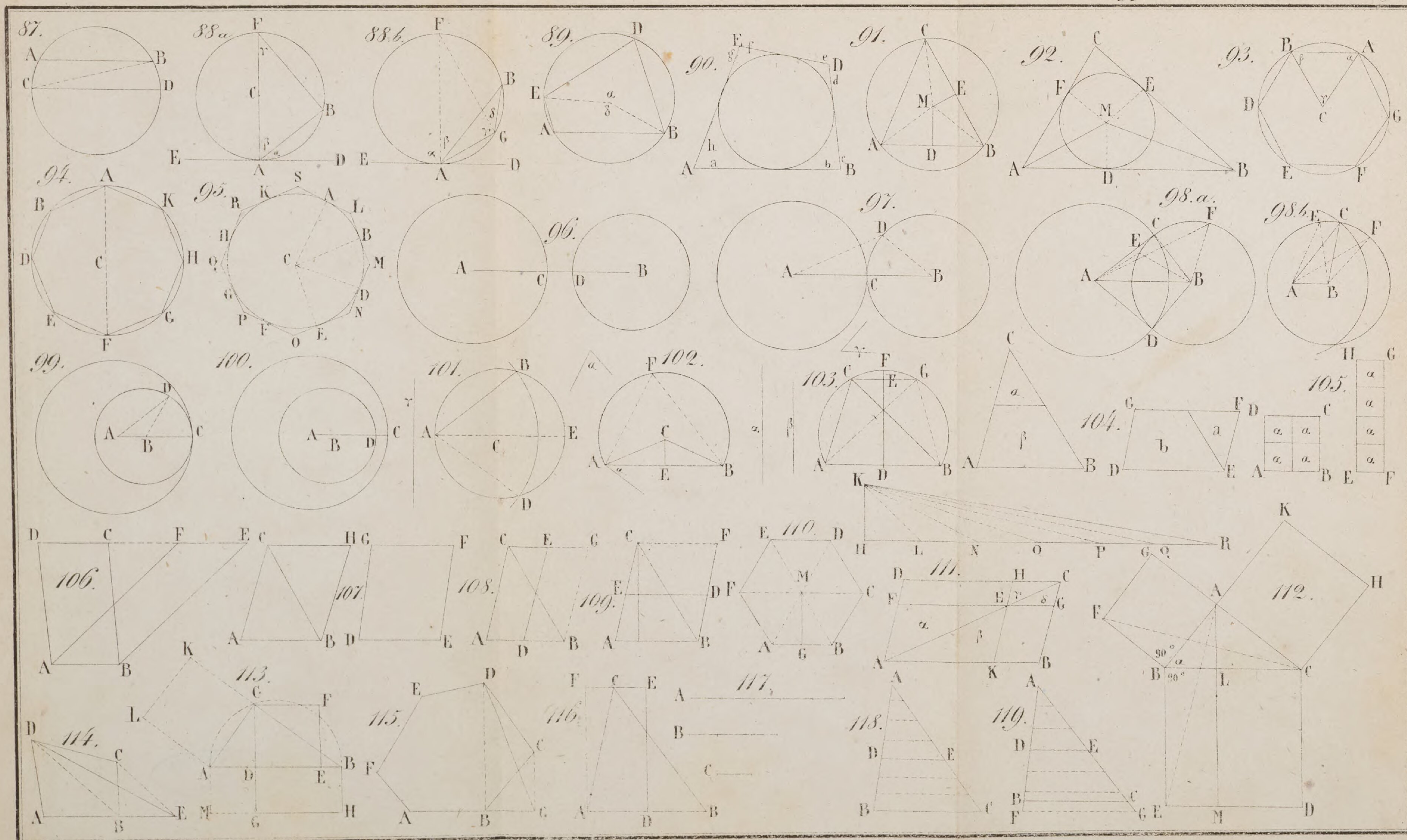
*) Wie genau diese Rechnung mit der Erfahrung übereinstimmt, zeigt unter andern: „Benzenberg, Rechenkunst und Geometrie für Stadtschulen. Düsseldorf 1811." S. 598.

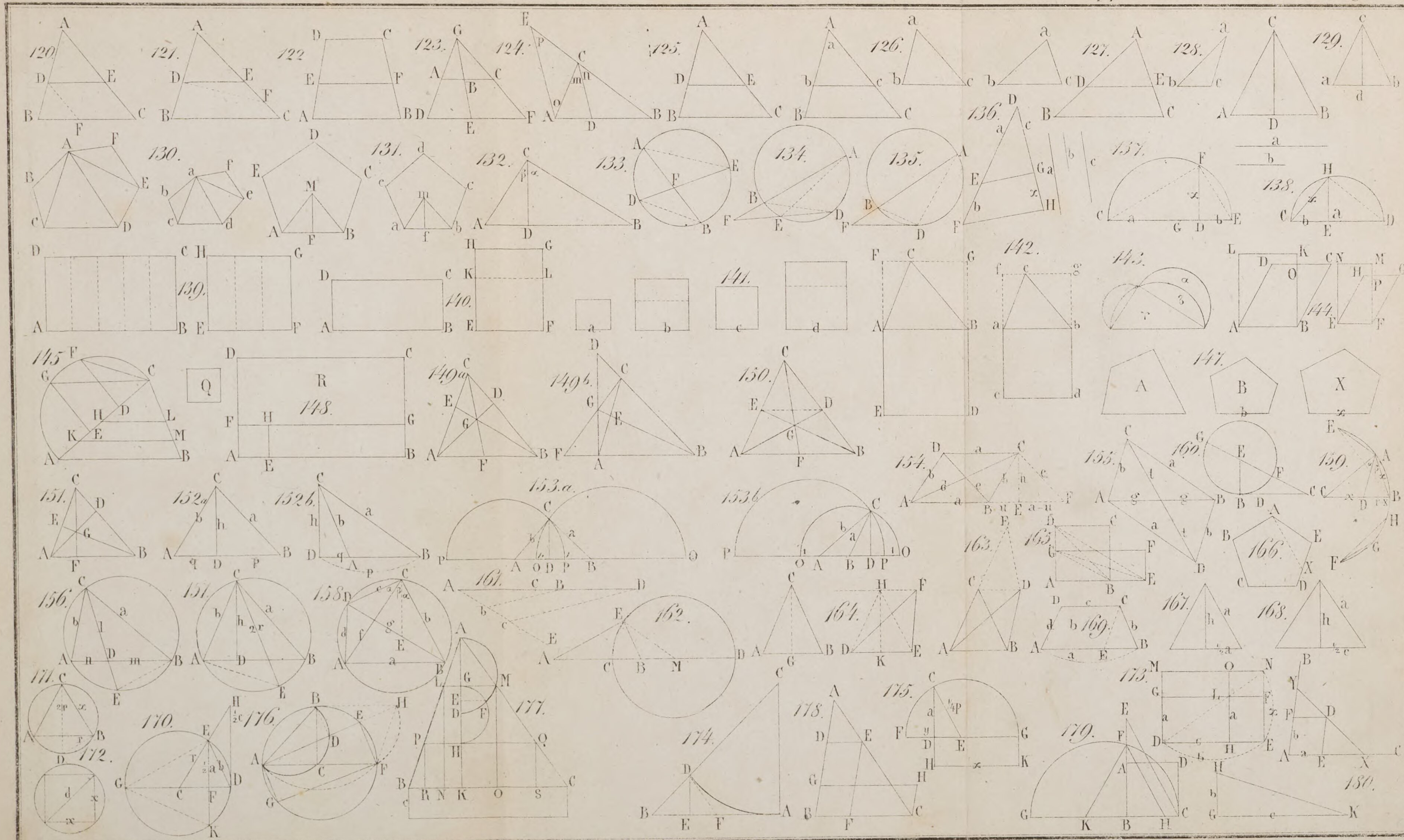
Taf. I zu Koppe's Planimetrie, 3te Auflage.


Taf. II zu Koppe's Planimetrie, 3te Auflage.

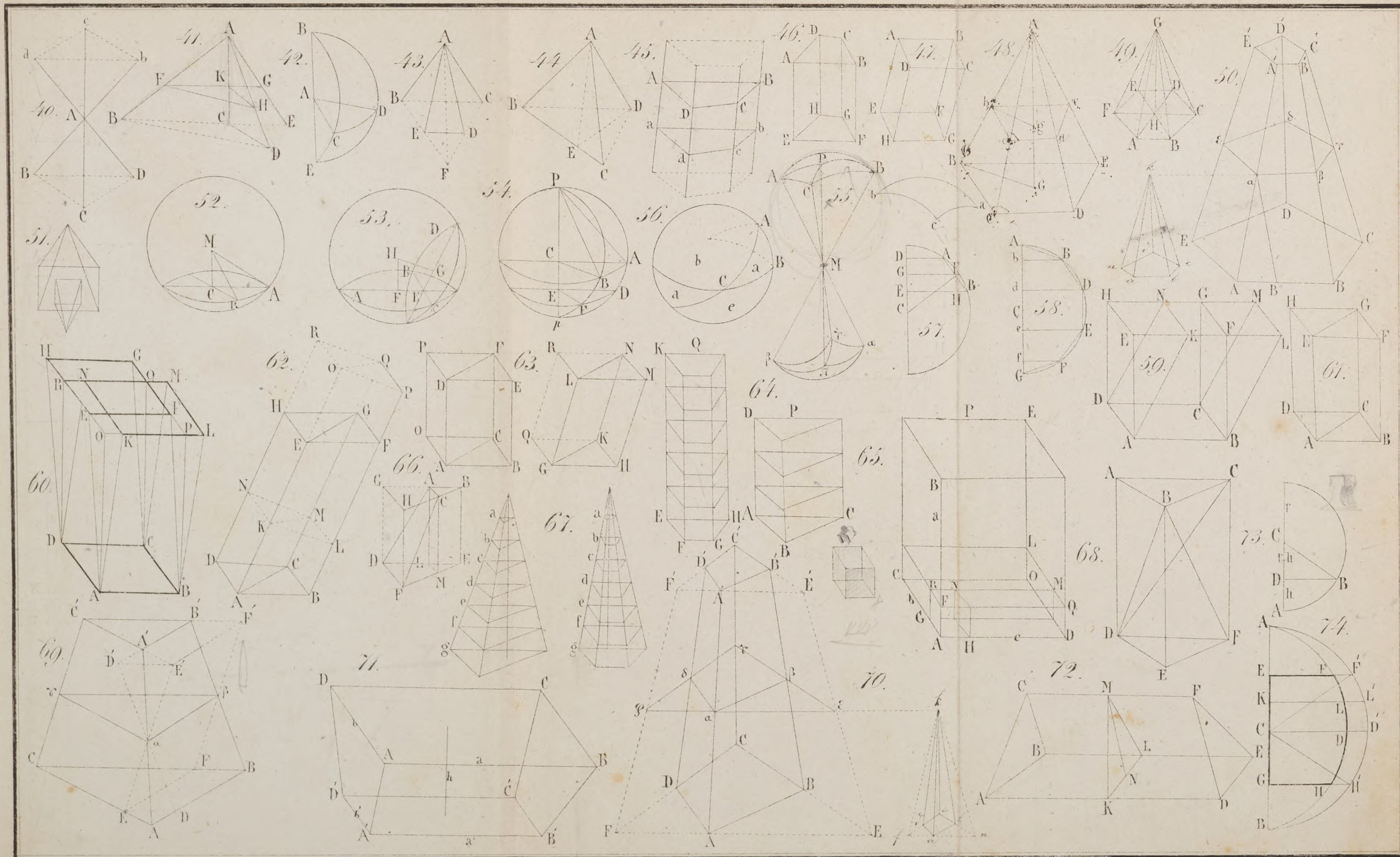



87.
88.a.
88.b.
89.
90.
91.
92.
93.
94.
95.
96.
97.
98.a.
98.b.
99.
100.
101.
102.
103.
104.
105.
106.
107.
108.
109.
110.
111.
112.
113.
114.
115.
116.
117.
118.
119.


120.
121.
122
123.
124.
125.
126.
127.
128.
129.
130.
131.
132.
133.
134.
135.
136.
137.
138.
139.
140.
141.
142.
143.
144.
145
148.
149a
149b.
150.
151.
152a
152b.
153.a.
153b
154.
155.
156.
157.
158.
159.
160.
161.
162.
163.
165.
164.
166.
167.
168.
169.
170.
171.
172.
173.
174.
175.
176.
177.
178.
179.
180.



Lith. Anst. von F. Eppy in Essen.


40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52.
53.
54.
55.
56.
57.
58.
59.
60.
61.
62.
63.
64.
65.
66.
67.
68.
69.
70.
71.
72.
73.
74.